Tirsdag 9.08.05

OPPFRISKNINGSKURS i matte

Oppg. Trekk sammen

a) $\frac{5-x}{x+3} + \frac{2x}{x-1}$ b) $\frac{2}{x^2-4x} + \frac{x}{x-4}$ c) $\frac{x-2}{x-3} + \frac{x}{x^2-9} - 2$

Løs

a) $$\frac{5-x}{x+3} + \frac{2x}{x-1} = \frac{(5-x)\cdot(x-1)}{(x+3)\cdot(x-1)} + \frac{2x\cdot(x+3)}{(x-1)\cdot(x+3)}$$

$$= \frac{5x-5-x^2+x+2x^2+6x}{(x+3)(x-1)} = \underline{\underline{\frac{x^2+12x-5}{(x+3)(x-1)}}}$$

LØNNER SEG å faktorisere nevnerne for å finne minst mulig fellesnevner.

b) $$\frac{2}{x(x-4)} + \frac{x\cdot x}{(x-4)\cdot x} = \underline{\underline{\frac{2+x^2}{x(x-4)}}}$$

c) $$\frac{x-2}{x-3} + \frac{x}{x^2-9} - 2 =$$

$$\frac{(x-2)(x+3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{x}{(x-3)(x+3)} - \frac{2\cdot(x-3)\cdot(x+3)}{(x-3)(x+3)} =$$

$$\frac{(x-2)(x+3)+x-2\cdot(x^2-9)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+3x-2x-6+x-2x^2+18}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-x^2+2x+12}{x^2-9}}}$$

I dag

$\boxed{\text{Polynomer, ligninger, linjer m.m}}$

- nullpunkter og røtter
- polynomdivisjon
- linjer og parabler
- ligninger og ligningssett

Polynomer

$$P(x) = ax + b \qquad (a \text{ og } b \text{ er tall})$$

er et polynom av grad 1

$$P(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a, b, c \text{ er tall})$$

er et polynom av grad 2 etc

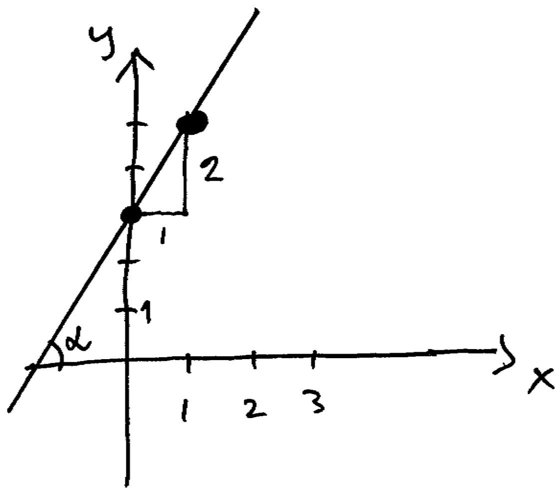
Rett linje

Grafen til $y = ax + b$ er en rett linje

EKS

$$y = 2x + 3$$

x	0	1
y	3	5



Når vi tegner grafen, så "tegner vi alle (x,y) som passer i ligningen"

Generelt: i $y = ax + b$, så er

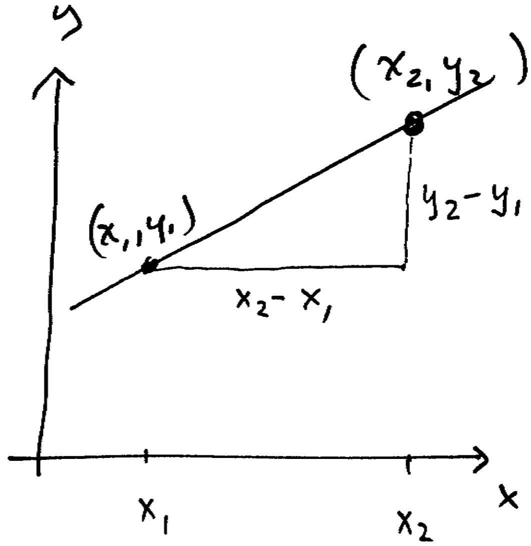
a = stigningstallet til linja, dvs

$a = \tan\alpha$

b = skjæringen med y-aksen

NB! Hvis l går gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2), så er stign. tallet

$$\boxed{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$



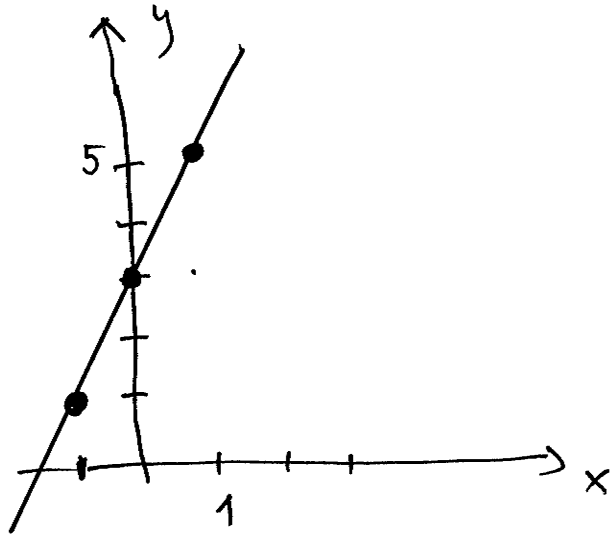
En rett linje gjennom (x_1, y_1) og med stign. tall a, har ligningen

$$\boxed{y - y_1 = a(x - x_1)}$$

Oppg. En rett linje går gjennom $(-1, 1)$ og har stign. tall 2. Finn ligningen.

LØSN

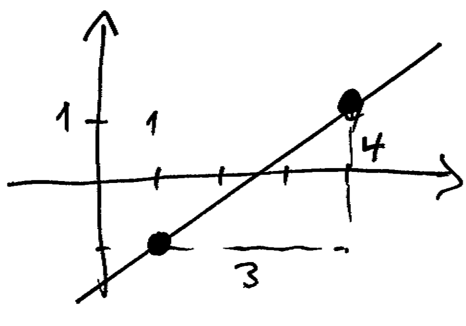
$$y - 1 = 2(x - (-1))$$
$$y - 1 = 2(x + 1)$$
$$y - 1 = 2x + 2$$
$$\underline{\underline{y = 2x + 3}}$$



Oppg. Finn ligningen for den rette linja som går gjennom $(1, -1)$ og $(4, 1)$

LØSN

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{4 - 1} = \frac{2}{3}$$



Ligning

$$y-(-1) = \frac{2}{3}(x-1)$$

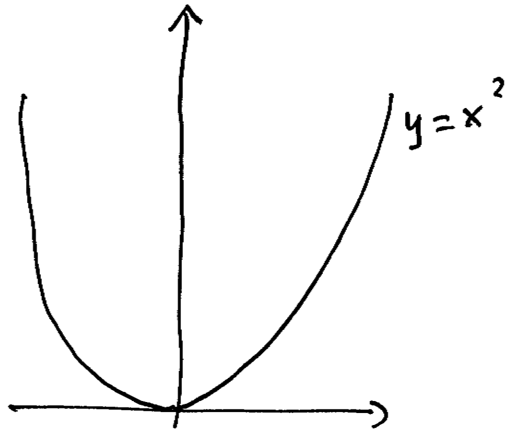
$$y+1 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - 1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}}}$$

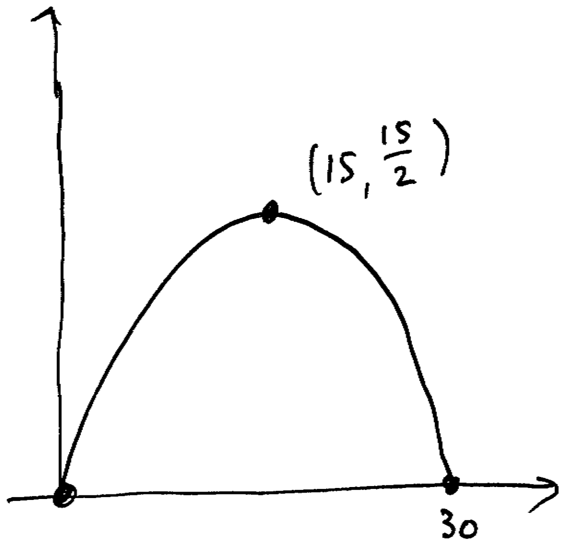
<u>Parabel</u> Grafen til

$$y = ax^2 + bx + c$$

er en parabel. Ifølge fysikkens lover, så er f.eks "kast (med stein) en parabelbane". Trenger 3 opplysninger for å bestemme a, b og c i en parabel.



<u>Oppgave</u> Skyter ut en kanonkule fra origo. Kula lander i $x=30$ og har $(15, \frac{15}{2})$ som høyeste punkt. Finn ligningen for parabelen.



<u>LØSN.</u> Skal finne a, b og c i $y = ax^2 + bx + c$

$(0,0)$ ligger på kurven $\Rightarrow$ $0 = a\cdot 0 + b\cdot 0 + c \Rightarrow \underline{c=0}$

$(30,0)$ —— " —— $\Rightarrow$ $0 = a\cdot 30^2 + b\cdot 30$

$(15,\frac{15}{2})$ —— " —— $\Rightarrow$ $\frac{15}{2} = a\cdot 15^2 + b\cdot 15$

dvs $\qquad c = 0$ $\qquad$ (5)

$$30a + b = 0$$
$$15a + b = \frac{1}{2}$$

Regn selv. Får $a = -\frac{1}{30}$, $b = 1$

dvs $\quad y = ax^2 + bx + c = \underline{\underline{-\frac{1}{30}x^2 + x}}$

POLYNOMDIVISJON

er nesten like lett som vanlig divisjon

$$
\begin{array}{l}
260 : 12 = 21 \\
\underline{24} \\
\;\;20 \\
\;\;\underline{12} \\
\;\;\;8 \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

dvs. div. går ikke opp, men likevel sant at

$$\frac{260}{12} = 21 + \frac{8}{12}$$

Tilsvarende

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + x^3 - 5x^2 + 4x - 6) : (x^2 - 3x + 2) = \underline{x^2 + 4x + 5} \\
\underline{-(x^4 - 3x^3 + 2x^2)} \\
\qquad 4x^3 - 7x^2 + 4x - 6 \\
\qquad \underline{-(4x^3 - 12x^2 + 8x)} \\
\qquad\qquad 5x^2 - 4x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{-(5x^2 - 15x + 10)} \\
\qquad\qquad\qquad 11x - 16 \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 + x^3 - 5x^2 + 4x - 6}{x^2 - 3x + 2} = x^2 + 4x + 5 + \frac{11x - 16}{x^2 - 3x + 2}$$

KONKLUSJON

Kan alltid utføre divisjonen $P(x) : Q(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

og få r som rest der r er et polynom

av grad som er mindre enn graden av $Q(x)$.

Får

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{r}{Q(x)}$$ for passende $f(x)$

eller $\boxed{P(x) = f(x) \cdot Q(x) + r}$

Divisjonen går opp når resten $r = 0$!

Viktig spesialtilfelle : $Q(x) = x - c$ (c tall)

Får $\boxed{P(x) = f(x) \cdot (x-c) + r \quad , r \text{ et tall}}$

Oppgave Utfør polydiv. :

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-2) = x^2 - 4x + 3 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\quad -4x^2 + 11x - 6 \\
\quad \underline{-(-4x^2 + 8x)} \\
\qquad 3x - 6 \\
\qquad \underline{-(3x - 6)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Resten er 0 ! Divisjonen går opp ! Får

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 2} = x^2 - 4x + 3$$

$$\Longrightarrow \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = \underline{(x-2) \cdot (x^2 - 4x + 3)}$$

NB! Når div. går opp, så har vi greidd å faktorisere! (dvs. skrive som et produkt)
Er polynomet $P(x)$ av grad 3, så kan vi løse ligningen

$$P(x) = 0 \quad !$$

EKS Vil løse $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

dvs. $(x-2)\cdot(x^2 - 4x + 3) = 0$

$\iff$ $x - 2 = 0$ eller $x^2 - 4x + 3 = 0$

abc-formel.

$\iff$ $\underline{\underline{x = 2}}$, $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 3}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$

$$x = \begin{cases} \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}} \\ \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}} \end{cases}$$

dvs $\underline{\underline{x = 2 \;,\; x = 1 \text{ og } x = 3}}$ er røttene.

PROBLEM Når går divisjonen opp, dvs når er resten $r = 0$?

SVAR Vet : $P(x) = f(x)\cdot(x - c) + r$

Får $P(c) = f(c)\cdot(c - c) + r = r$

dvs $r = 0 \iff P(c) = 0$

Konklusjon (Nullpunktsetningen)

Div. med $x-c$ går opp $\iff P(c) = 0$

dvs. $x = c$ er et nullpunkt i $P(x)$.

Oppg. Avgjør om div.

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-2)$$

går opp uten å utføre divisjon.

Løs La $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$$P(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 0$$

Så div med $x-2$ går opp!

$\boxed{\text{LIGNINGER}}$

$\boxed{\text{Hovedprinsipp}}$:

Hvis du gjør noe (dele, gange, opphøye i 2 potens, ta log etc) i en ligning så gjør det med begge sider og GJØR DET MED HELE SIDENE

EKS Irrasjonal ligning (hvor $\sqrt{\ }$ inngår)

Løs

$$\sqrt{x+7} + 1 = 2x$$

$$\sqrt{x+7} = 2x - 1$$

Opphøyer i 2 potens

$$\cancel{x+7 = (2x)^2 - 1^2} \quad \text{er FY!}$$

$$x+7 = (2x-1)^2 \quad \text{er RETT!}$$

$$x+7 = (2x)^2 - 2\cdot 2x + 1$$
$$x+7 = 4x^2 - 4x + 1$$
$$0 = 4x^2 - 5x - 6$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 4\cdot(-6)}}{2\cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2\cdot 4} = \frac{5 \pm 11}{2\cdot 4}$$
$$x_1 = \frac{16}{8} = 2 \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{-6}{2\cdot 4} = -\frac{3}{4}$$

Må sette prøve, $\underline{\underline{x_1 = 2}}$ er løsn., x_2 må forkastes.

LIGNINGSSYSTEMER

f. eks 3 ligninger med 3 ukjente.

Metode Finn et uttrykk for en av de ukjente ved å bruke en av ligningene og sett dette uttrykket inn i de andre ligningene. Forsett slik.

EKS Løs

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & x+y+z = 4 \\ \text{II} \quad & x-y+2z = 4 \\ \text{III} \quad & 2x+2y-z = 2 \end{aligned}$$

Av (I): $\underline{z = 4-x-y}$. Innsett i II og III:

II: $x-y+2\cdot(4-x-y) = 4$

$$x - y + 8 - 2x - 2y = 4 \iff \underline{-x-3y=-4}$$

III: $2x+2y-(4-x-y) = 2$

$$2x+2y-4+x+y = 2 \iff \underline{3x+3y=6}$$
$$\iff x+y=2$$

Har
$$-x-3y = -4$$
$$x+y = 2$$

Av den siste : $y = 2-x$

Setter inn i denne og får

$$-x-3(2-x) = -4$$
$$-x-6+3x = -4$$
$$2x = 6-4 = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

Får
$$y = 2-x = 2-1 = \underline{\underline{1}}$$
$$z = 4-x-y = 4-1-1 = \underline{\underline{2}}$$