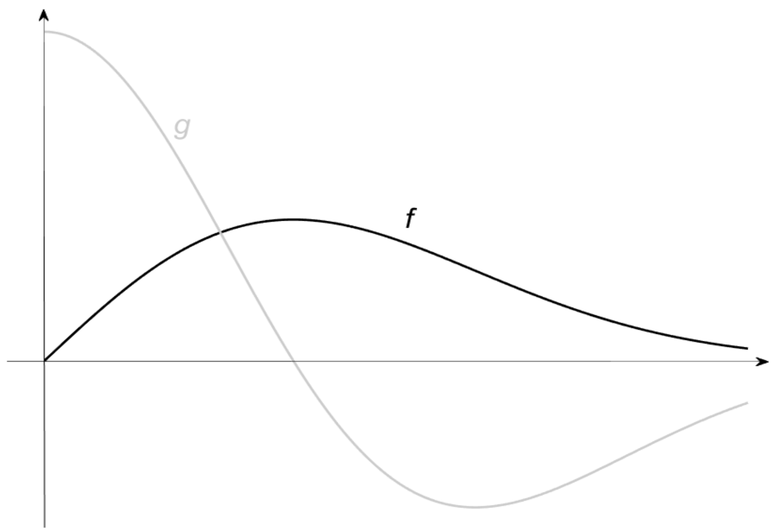
Innlevering	BYFE DAFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 4
Innleveringsfrist	Fredag 11. mars 2016
Antall oppgaver:	$10 + 1$

Løsningsforslag



1

Hvilken av de to funksjonene vist i figuren er den deriverte av den andre? Forklar.

LF: Vi ser at funksjonen g er positiv for lave verdier av x, hvor f er voksende, og skifter fortegn for samme verdi hvor f har sitt maksimum. Videre er g negativ når f er avtagende. Dvs $g = f'$.

2

Deriver funksjonene.

a) $f(x) = x^2 \sin(x) + \cos(\sin(x)) + \cos(2x)\sin(3x)$

LF: Anvendelse av produktregelen og kjerneregelen gir $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x) - \sin(\sin(x))\cos(x) + \cos(2x)3\cos(3x) - 2\sin(2x)\sin(3x)$.

b) $f(x) = \sin(7x+1)/e^x$

LF: Kvotientregelen og kjerneregelen gir

$$f'(x) = \frac{7\cos(7x+1)e^x - \sin(7x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{7\cos(7x+1) - \sin(7x+1)}{e^x}$$

c) $f(x) = x^x$

LF: Vi skriver om x^x til en potens med grunntall e som følger

$$x^x = (e^{\ln(x)})^x = e^{x\ln(x)}.$$

Den deriverte finner vi ved å benytte kjerneregel og produktregel

$$(x^x)' = \left(e^{x\ln(x)}\right)' = e^{x\ln(x)} \cdot (x\ln(x))' =$$

$$e^{x\ln(x)} \cdot (1 + \ln(x)) = \underline{x^x(1 + \ln(x))}$$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^3 & x < 0 \\ x^4 & x \geq 0 \end{cases}$

LF:

$$\underline{h'(x) = \begin{cases} -3x^2 & x < 0 \\ 4x^3 & x \geq 0 \end{cases}}$$

Her har vi sjekket at den deriverte i "knekkpunktet", hvor vi skifter uttrykk, faktisk eksisterer og er lik 0.

Siden begge grensene

$$\lim_{k\to 0^+} \frac{h(k) - h(0)}{k} = \lim_{k\to 0^+} \frac{k^4 - 0}{k} = 0$$

og

$$\lim_{k\to 0^-} \frac{h(k) - h(0)}{k} = \lim_{k\to 0^-} \frac{-k^3 - 0}{k} = 0$$

eksisterer og er lik 0, så eksisterer grensen

$$\frac{d\,h(x)}{d\,x}\Big|_{x=0} = \lim_{k\to 0} \frac{h(k) - h(0)}{k}$$

og den deriverte til h i $x = 0$ er lik 0.

3

Bestem parametrene a og b slik at funksjonen

$$h(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x < 1 \\ -x^3 & x \geq 1 \end{cases}$$

er deriverbar for alle x.

LF: Siden funksjonen definert over helt sikkert er kontinuerlig og deriverbar overalt bortsett fra $x = 1$ er det nok å sjekke kontinuitet og deriverbarhet for $x = 1$. Kontinuitet har vi dersom $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, dvs vi må ha $a + b = -1$. Den deriverte er

$$h'(x) = \begin{cases} 2ax & x < 1 \\ -3x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

For deriverbarhet må vi ha $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, dvs $2a = -3$. Dermed har vi to ligninger $a + b = -1$ og $2a = -3$ som vi bruker til å bestemme a og b. Vi få r $a = -3/2$ og $b = -1 - a = -1 - (-3/2) = 1/2$. Dermed er

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} & x < 1 \\ -x^3 & x \geq 1 \end{cases}$$

4

Finn tangentlinjene til funksjonen $f(x) = x^3 - x^2$ som er parallelle til linjen $y = 4x + 1$.

LF: En tangentlinje er parallell til $y = 4x + 1$ hvis og bare hvis $f'(x)$ er lik 4. Vi finner først den deriverte til $f(x)$ og bestemmer når den er lik 4. Den deriverte er lik

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2).$$

Likningen $f'(x) = 4$ er ekvivalent til $3x^2 - 2x - 4 = 0$. Løsningene er $x = (1 \pm \sqrt{13})/3$.

Tangentlinjene er

$$\underline{y = 4(x - (1 + \sqrt{13})/3) + f((1 + \sqrt{13})/3)} \quad \text{og} \quad \underline{y = 4(x - (1 - \sqrt{13})/3) + f((1 - \sqrt{13})/3)}.$$

Vi har at

$$f((1 \pm \sqrt{13})/3) = \frac{2(7 + \sqrt{13})(\pm\sqrt{13} - 2)}{27}.$$

5

En kurve er gitt ved

$$x^3 - x^2 y - y^4 + 7 = 0$$

Sjekk at punktet $(3, 2)$ ligger på kurven. Finn tangentlinjen til kurven i punktet $(3, 2)$.

LF: Setter vi $(3, 2)$ inn i uttrykket får vi

$$3^3 - 2^2 \cdot 3 - 2^4 + 7 = 27 - 12 - 16 + 7 = 0$$

så likningen er oppfylt for $(3, 2)$ og punktet ligger i løsningsmengden til likningen.

Implisitt derivasjon gir

$$3x^2 - 2xy - x^2 y' - 4y^3 y' = 0.$$

Vi isolerer y' og får

$$y' = \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + 4y^3}$$

I punktet $(3, 2)$ er derfor

$$\frac{dy}{dx}(3, 2) = \frac{27 - 2 \cdot 3 \cdot 2}{3^2 + 4 \cdot 2^3} = \frac{15}{41}.$$

Tangentlinjen er gitt ved ettpunktsformelen

$$\underline{y = \frac{15}{41}(x - 3) + 2}$$

6

En kuleformet beholder fylles med en væske. Tilførselen er jevn. Innvendig radius til kulen er nøyaktig 1 meter. Det tar 1 time å fylle kulen halvfull. Hvor mye væske tilføres per sekund? Finn endringsraten for væskehøyden (fra bunnen) når væskehøyden er 3/4 av høyden til kulen (det vil si 3/2 ganget med radius til kulen).

LF: Volumet til halve kulen er lik halve volumet til en kule

$$\frac{1}{2}\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3} = 2.094m^3.$$

Det tar $60^2 s = 3600s$ å fylle opp halve kulen. Siden enringsraten er konstant er den lik gjennomsnittlig væskestrøm som er

$$2.094m^3/3600s = 0.0005817m^3/s = 0.5817dm^3/s.$$

($1m = 10dm$ så $1m^3 = 10^3 dm^3 = 1000dm^3$. En kubikkdesimeter kalles også en liter.)

La væskevolumet når væskeoverflaten har høyde h fra bunnen være $V(h)$. Vi har regnet ut at endringsraten til volumet med hensyn til tiden er

$$\frac{dV}{dt} = 0.5817dm^3/s$$

Vi benytter kjerneregelen på den sammensatte funksjonen $V(h(t))$ og får

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

Her har vi koblet sammen enringsratene til V og h. Hvis vi kan finne $\frac{dV}{dh}$ så kan vi fra første del av oppgaven også finne endringsraten til h med hensyn til tiden t.

Hadde vi hatt et uttrykk for $V(h)$ kunne vi ha derivert uttrykket og funnet $\frac{dV}{dh}$. Alternativt kan vi observere at endringsraten er lik tverrsnittarealet til figuren i høyde h. (Forskjelen ΔV mellom $V(h+\Delta h)$ og $V(h)$ er volumet til en tynn plate med tykkelse Δh og areal på bunnplaten lik tverssnittarealet til figuren i høyde h. I grensen Δh går mot 0 vil kvotienten $\Delta V/\Delta h$ være lik tverssnittarealet i høyde h.)

Tverrsnittarealet er arealet til en disk med radius $r(h)$ som da er $\pi r^2(h)$. Fra Pytagoras får vi at $r^2(h) + (h - R)^2 = R^2$. Når $h = 3R/2$ er derfor tverrsnittarealet lik

$$\pi(R^2 - (R/2)^3) = 3\pi R^2/4 = 2.356m^2 = 235.6dm^2.$$

Vi får dermed at

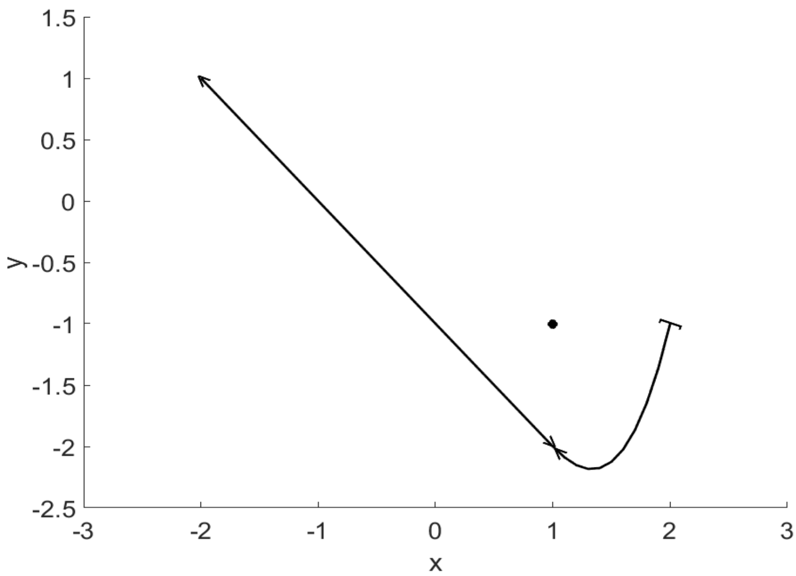
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}.} = \frac{0.5817dm^3/s}{235.6dm^2} = 0.00247dm/s = 0.247mm/s$$

7

Finn alle lokale og globale maksimums- og minimumspunkt til funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & -2 < x < 1 \\ -1 & x = 1 \\ x^3 - 2x^2 - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

LF: Se figur under. Intervallet definert ved $-2 < x < 1$ er åpent og f er avtagende på dette intervallet slik at f ikke kan ha noe lokalt eller globalt maks eller min på dette intervallet. For $x = 1$ representerer punktet $(1, -1)$ et lokalt maks (ikke globalt maks siden f har større verdier enn -1). På intervallet $1, 2]$ er det et globalt min der $(x^3 - 2x^2 - 1)' = 3x^2 - 4x = 0$, dvs for $x = 4/3$ (og $y = -59/27$) . Det er også et lokalt maks i høyre endepunkt, dvs for $x = 2$, dvs med $y = -1$.



8

Bestem grensene dersom de eksisterer.

a)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sin(\pi x)}$$

LF: Dette er en grense av type 0/0. L'Hopitals regel gir

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sin(\pi x)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/(2\sqrt{x})}{\pi \cos(\pi x)} = \frac{1}{-2\pi} = \frac{-1}{2\pi}.$$

Så grensen eksisterer og er lik $\underline{1/(2\pi)}$.

b)

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{e^x - e^2}{x^2 - 1}$$

LF: Grensen av nevneren er lik 1 og grensen av telleren er lik $e^{\sqrt{2}} - e^2$. Fra grensesetningene er derfor

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{e^x - e^2}{x^2 - 1} = \underline{e^{\sqrt{2}} - e^2}$$

c)

$$\lim_{x\to-1}\frac{2^x-1/2}{x^2-1}$$

LF: Dette er en grense av typen 0/0. Ved L'Hopitals regel er grensen lik

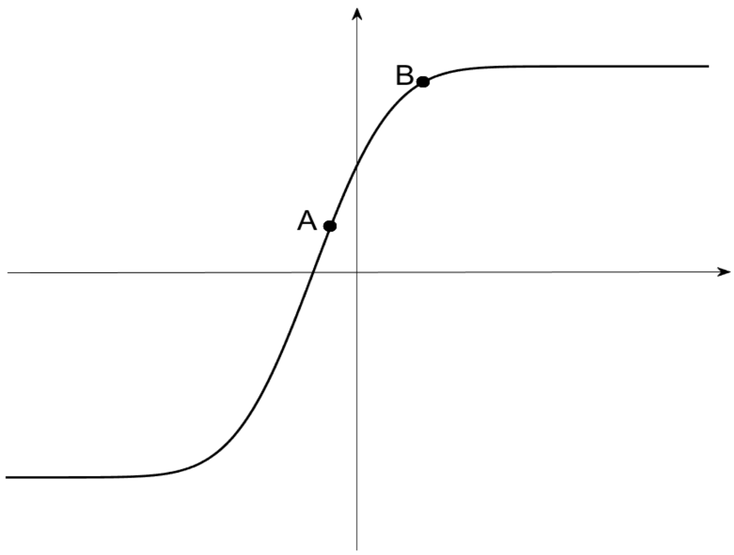
$$\lim_{x\to-1}\frac{2^x-1/2}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{\ln(2)2^x}{2x}=\underline{\frac{-\ln(2)}{4}}$$

d)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt[100]{x}}$$

LF: Dette er en grense av type ∞/∞. Ved L'Hopitals regel er dette lik

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{x^{-99/100}}\frac{1}{100}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/100}}\frac{1}{100}=\underline{0}$$



9

Vi ønsker å bestemme nullpunktet til funksjonen vist over ved Newtons metode. Hvorfor er det lurere å bruke punkt A som startpunkt enn å bruke punkt B? Hva vil skje dersom punkt B velges som startpunkt?

LF: Den deriverte i punkt A er større enn i punkt B slik at første iterasjon ved start i A gir en god approksimasjon til nullpunktet, mens den deriverte i punkt B er mindre, slik at resultatet av første iterasjon ser ut til å være et punkt som er lengre borte fra nullpunktet enn punkt B. Den deriverte i dette punktet er enda mindre og andre iterasjon gir dermed et punkt som er enda lengre borte. Metoden kan derfor i dette tilfellet, ved et dårlig valg av startpunkt, divergere.

10

Forklar hvorfor hver av funksjonene har akkurat *ett* nullpunkt i det oppgitte intervallet. (Det er naturlig å henvise til skjæringssetningen og funksjonenes monotoniegenskaper.)

Bruk Newtons metode for å finne skjæringspunktet med x-aksen. Hvis det ikke fungerer bruk halveringsmetoden. Estimer nullpunktene med 4 gjeldende siffers nøyaktighet.

a) $x^2 - x - 1, \quad [1, 2]$

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x} - 2, \quad x \geq 0$

c) $x^3 + 2x - 2 \quad$, alle x

LF: a) Den deriverte til funksjonen er $2x - 1$. Den deriverte er derfor (ekte) positiv i hele intervallet. Fra monotonitetstesten er den derfor økende. Funksjonen kan derfor ikke treffe x-aksen mer enn en gang. Siden funksjonen er kontinuerlig og verdiene i 1 og 2 er henholdsvis -1 og 1 så gir skjæringssetningen at det finnes ett nullpunkt i intervallet.

Vi benytter Newtons metode og finner estimatet $\underline{1.618}$. (Det eksakte svaret er det gylne snitt $(\sqrt{5}+1)/2 = 1.61803398875\ldots$.)

b) Den deriverte er $1/2\sqrt{x+1} + 1/(3(\sqrt[3]{x})^2)$. Dette er positivt når x er positiv. Det er ikke definert når $x = 0$. Funksjonen er kontinuerlig for alle $x \geq 0$. Videre er funksjonsverdiene i 0 og 8 lik henholdsvis -2 og 3. Ved skjæringssetningen har funksjonen derfor akkurat en rot. Et estimat med Newtons metode gir $\underline{0.4804}$.

c) Den deriverte er lik

$$\frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2}.$$

Dette er negativt for alle x ulik 0. Det er lik 0 når x er lik 0. Derfor er funksjonen ekte avtagende og den har ikke mer enn ett nullpunkt. Funksjonen er kontinuerlig for alle x og videre er funksjonsverdien i -3 og 0 henholdsvis positiv og negativ. Ved skjæringssetningen er det derfor akkurat ett nullpunkt. Newtons metode gir oss følgende estimat $\underline{-2.132}$.

d) Den deriverte til $x^3 + 2x - 2$ er funksjonen $3x^2 + 2$, som alltid er positiv. Funksjonen kan derfor maksimalt ha ett nullpunkt. Siden funksjonsverdien i 0 er lik -2 og funksjonsverdien i 1 er lik 1 så finnes det ved skjæringssetningen akkurat ett nullpunkt mellom 0 og 1. Newtons metode gir oss estimatet $\underline{0.7709}$.

11

Her skal dere benytte Newtons metode til å lage en kalkulator som regner ut kvadratrøtter. Dette er ganske realistisk i forhold til hvordan lommekalkulatorene faktisk regner ut kvadratrøtter. Vi tar utgangspunkt i funksjonen $f(x) = x^2 - a$. Det positive nullpunktet til $f(x)$ er $\sqrt{a}$ for $a > 0$. (Hvorfor er det et entydig nullpukt for $x \geq 0$?)

a) Vis at Newtons metode gir følgende rekursive formel for estimatet til nullpunktet (når vi starter med en positiv verdi for x)

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

LF: Den rekursive formelen er generelt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Her er $f(x) = x^2 - a$ og $f'(x) = 2x$ slik at

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}.$$

b) Start gjerne med $x_0 = a$. Hvor mange iterasjoner ser det ut til at dere behøver for å regne ut kvadratroten med en nøyaktighet på minst 12 siffer? Test gjerne på et enkelt tilfelle, som $a = 4$, slik at det er lett å se hva som skjer. (Dere kan for eksempel lage en løkke i matlab som skriver ut de ulike verdiene til x_n rekursivt.)

LF: For $a = 4$ ser metoden ut til å regne ut roten med en ønsket nøyaktighet i løpet av fem steg. Her er avviket beregnet av Matlab:

```
0.500000000000000
0.050000000000000
6.097560975613092e-04
9.292229474766600e-08
2.220446049250313e-15
```

c) Lag en matlab funksjon eller et skript som tar inn et tall og som gir ut kvadratroten til tallet (regnet ut ved den rekursive beskrivelsen ovenfor). Kall gjerne funksjonen rot. På hjemmesiden ligger en matlab funksjon som heter rot og som forøvrig regner ut en helt annen funksjon. Dere kan ta utgangspunkt i det skriptet og modifisere det hvis dere ønsker. (Dere trenger ikkje levere inn skriptet dere lager.)