Lineær algebra

19 mai 2016

Lineære transformasjoner

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = T(\vec{V}_1) + T(V_2)$$

$$T(k\vec{V}) = k\,T(\vec{V}) \qquad k \text{ skalar}$$

standardmatrisen er en matrise M s.a. den lin. trans. T er gitt ved matrise-multiplikasjon

$$T(\vec{V}) = M \cdot \vec{V}$$

Gitt $T(\vec{V}_1) = W_1$ og $T(\vec{V}_2) = \vec{W}_2$

$M \cdot \vec{V}_1 \qquad M\vec{V}_2$

$$M[\vec{V}_1, \vec{V}_2] = [\vec{W}_1, \vec{W}_2]$$

$\uparrow$ inverterbar $\Rightarrow$

$$M = [\vec{W}_1, \vec{W}_2]\,[\vec{V}_1\ \vec{V}_2]^{-1}$$

(2) $M = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2]$. La $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$M\vec{v} = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2]\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$$

så $\vec{u}_1 = M\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (1\cdot\vec{u}_1 + 0\cdot\vec{u}_2 = \vec{u}_1)$

$\vec{u}_1 = T(\vec{e}_1)$

tilsvarende $T(\vec{e}_2) = \vec{u}_2$.

$$\underline{M = [T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2)]}$$

Eks. Anta T er en lin. trans. slik at

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bestem standardmatrisen til T

$$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

standardmatrisen er $M = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\det(M) = 4\cdot 2 - (-1\cdot 2) = \underline{10}$$

③ Bestem vektorene $\vec{v}$ slik at

$$T(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ hvor M er standard-matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ganger med $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$ fra venstre på begge side

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(det)

$$\vec{v} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2-1 \\ -2-4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}}}$$

(sjekker svaret:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4+6 \\ 2-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \checkmark$$)

4

Implisitt derivasjon

- Hva er radius og senter til sirkelen

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y = 0$$

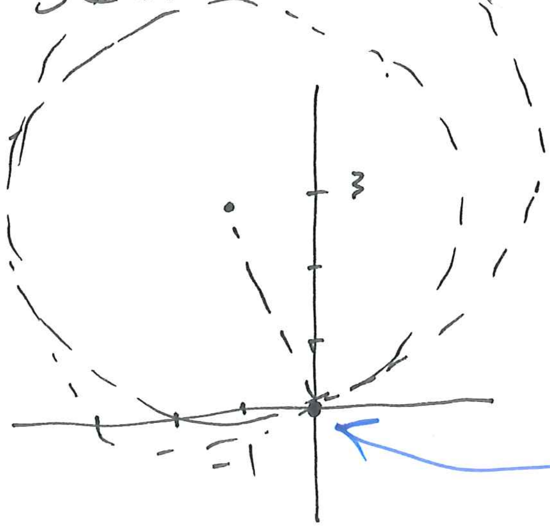
- Bestem stigningstallet til tangenten i punktet $(0,0)$ på sirkelen.

$$\underbrace{(x+1)^2 - 1}_{x^2+2x} + \underbrace{(y-3)^2 - (-3)^2}_{y^2-6y} = 0$$

så likningen er ekvivalent til

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 10$$

senteret er $(-1,3)$ og radius er $\sqrt{10}$



(Forventer y' mellom 0 og 1 ...)

5

$$x^2 + 2x + y_{(x)}^2 - 6y_{(x)} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 2x + y_{(x)}^2 - 6y_{(x)}\right) = \frac{d}{dx} 0 = 0$$

$$2x + 2 + 2y_{(x)} \cdot \frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2(x+1) + \frac{dy}{dx}(2 \cdot y - 6) = 0$$

$$2(x+1) = 2(3-y)\frac{dy}{dx}$$

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{3-y}}}$$

I $(0,0)$ er stigningstallet til tangenten lik $\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Kobla hastigheter

6

En ballong blåses opp slik at

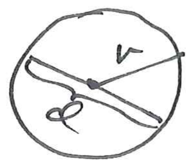
$\frac{dV}{dt}$ er konstant lik 0.1 L/sek.

Hvor raskt endrer diameteren seg når den 10 cm?

(overflaten til en kule med radius r er $4\pi r^2$.)

d diameter
r radius

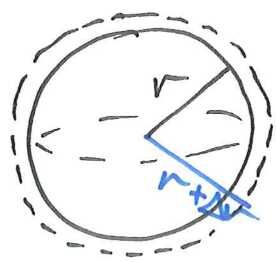
$d = 2r$
diameter $= 2 \cdot$ radius



Hva er $\frac{dr}{dt}$ når $r = 5$ cm?

$$\frac{d\,V(r(t))}{dt} = 0.1 \text{ L/sek} = 0.1 \text{ dm}^3/\text{sek}.$$

$$= \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$



Så $\frac{dr}{dt} = \frac{dV/dt}{dV/dr}$

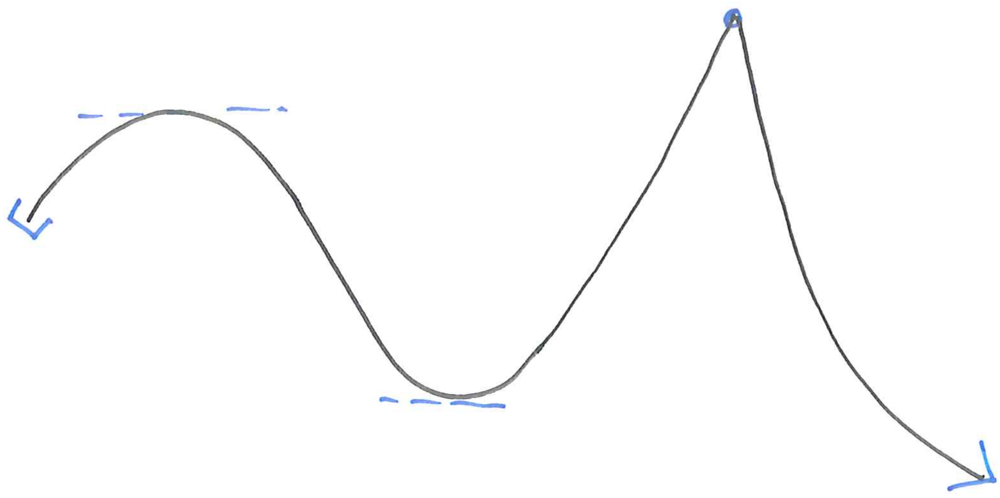
$\frac{dV}{dr} =$ overflate-arealet $= 4\pi r^2$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{0.1 \text{ dm}^3/\text{sek}}{4\pi\left(\frac{1}{2}\text{dm}\right)^2} = \frac{0.1}{\pi}\,\frac{\text{dm}}{\text{sek}}$$

(1 dm = 10 cm)

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi}$ cm/sek så $\frac{d\,d}{dt} = 2\frac{dr}{dt} = \underline{\underline{\frac{2}{\pi} \text{ cm/sek}}}$

optimalisering



Let etter kritiske punkt til $f(x)$:

- $f'(x) = 0$
- $f'(x)$ ikkje eksistere
- endepunkt.

Ekstremalpunktene er blant de kritiske punktene.

Ekstremalverdisetningen garantere eksistens av globale maks og min. punkter. for alle kontinuerlige funksjoner definert på en begrenset lukket intervall.

⑧

Eksempel

$$\text{Fortjeneste} = \underbrace{\left(\text{Antall enheter solgt}\right)}_{A} \cdot \underbrace{\left(\text{fortjeneste per enhet}\right)}_{f}$$

$$A = 1000 - 100 \cdot f$$

(Anta prod. kostnad $=0$ så pris $=$ fortjeneste)

Hva bør fortjeneste f per enhet være for at vi skal få størst mulig total fortjeneste?

$$F(f) = (1000 - 100 \cdot f) \cdot f \qquad [0, 10]$$

Fortjenesten $F(f)$ er størst mulig når f er et kritisk punkt.

$$\cancel{A}(0) = \cancel{A}(10) = 0$$

$$F'(f) = (1000 \cdot f - 100 \cdot f^2)' = 1000 - 200 f$$

$F'(f) = 0$ når $\underline{\underline{f = 5}}$

$$F(5) = (1000 - 5 \cdot 100) \cdot 5 = \underline{\underline{2500}}$$

Fortjenste per enhet $\underline{\underline{f = 5}}$ gir størst total fortjeneste. Den er da $\underline{\underline{2500}}$

9

Grenseverdier

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

når x nærmer seg a, så vil $f(x)$ nærme seg L

f er kontinuerlig i a hvis $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \qquad (\text{type } \tfrac{0}{0})$$

L'Hopitals regel $\qquad \lim_{x \to 1} \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3}$

(alternativt: $\qquad x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$\qquad x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x-1)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$
)

10

$$\lim_{x\to\infty} x e^{-x} \qquad \left(\text{type } "\infty \cdot 0"\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{1}{1/e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \qquad "\frac{\infty}{\infty}"$$

$$\left(\text{skrevet } e^{-x} = (e^x)^{-1} = \frac{1}{e^x}\right)$$

L'Hopitals regel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Tilsvarende $\lim_{x\to\infty} x^n \cdot e^{-x} = 0$ for alle n naturlig tall

Eksponentiellfunksjonen vokser raskere en ethvert polynom.

Finn grensen $\lim_{x\to 2} \dfrac{\int_2^x \sin(t)\,dt}{\sin(x)-\sin(2)}$. (type $\frac{0}{0}$)

11

L'Hopital

$$\frac{d}{dx}\int_2^x \sin(t)\,dt = \sin(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin(x)-\sin(2)\right) = \cos(x)$$

Så grensen er lik $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{\sin(2)}{\cos(2)}$

$$= \underline{\underline{\tan(2)}}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \cos(t^2)\,dt$$

$$F(u) = \int_0^u \cos(t^2)\,dt$$

$$\frac{d}{du}F(u) = \cos(u^2) \qquad \text{(Fundamentalteoremet)}$$

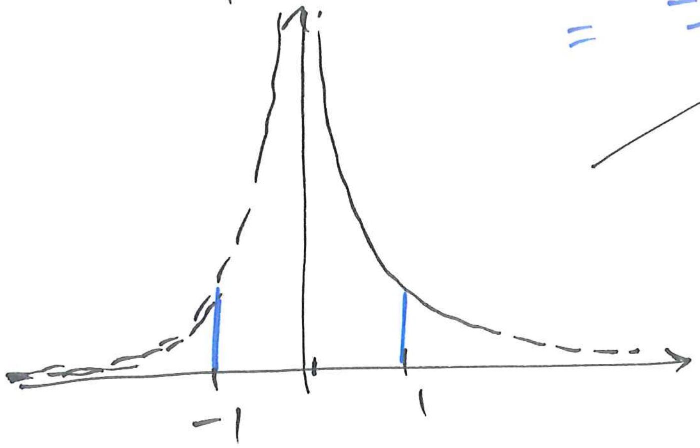
$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\cos(t^2)\,dt = \frac{d}{dx}F(x^2) = F'(x^2)\cdot\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= \cos((x^2)^2)\cdot 2x$$

$$= \underline{2x\cos(x^4)}$$

(12)

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \quad \cancel{= -x^{-1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \left(\frac{-1}{-1}\right) = \underline{\underline{-2}}}$$



Ugyldig.

$\frac{1}{x^2}$ har ikkje en antiderivert på $[-1, 1]$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} -1 + \frac{1}{\epsilon}$$

$$= \infty$$

$$x^3 - x = x(x^2-1)$$

$$|x^3 - x| = \begin{cases} x - x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^3 - x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 |x^3 - x|\,dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^3)\,dx + \int_1^2 (x^3 - x)\,dx$$

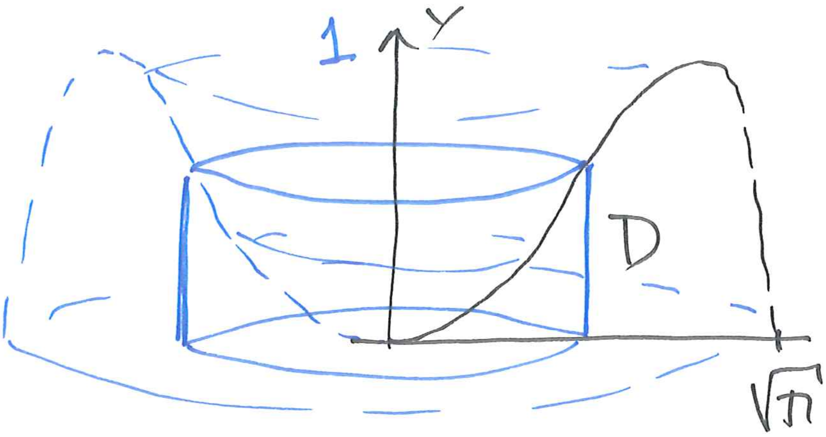
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + (4 - 2) = \underline{\underline{2.5}}$$

13 La $f(x) = \sin(x^2)$

La D være regionen avgrenset av x-aksen og grafen til $f(x)$ $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$.



(inneholdt i en sylinder med volum π^2)

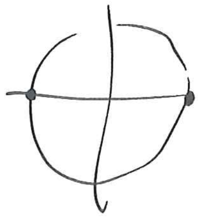
Finn volumet til legemet som fremkommer ved å rotere D om y-aksen.

$$V = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2\pi x \cdot \sin(x^2)\, dx$$

sylinder-skall

substitusjon $u = x^2$

$du = 2x\,dx$



$$V = \int_{u(0)}^{u(\sqrt{\pi})} \pi \sin(u)\, du$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \sin(u)\, du = \pi\left(-\cos(u)\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= \pi(-\cos(\pi) + \cos(0))$$

$$= \underline{\underline{2\pi}}$$

(14) $y' = 4e^{2x-y}$ $\qquad$ $y(0)=0$ $\qquad$ August 2014

Separabel

$$y' = \underbrace{4\cdot e^{2x}}\cdot \underbrace{e^{-y}}$$

$$\frac{y'}{e^{-y}} = 4e^{2x} \qquad\qquad \frac{1}{e^{-y}} = \frac{1}{1/e^{y}} = e^{y}$$

$$\int e^{y}\cdot \underbrace{y' dx} = \int 4e^{2x}\,dx$$

$$\int e^{y}\,dy = 4\int e^{2x}\,dx$$

$$e^{y} = 4\,\frac{e^{2x}}{2} + c$$

$$= 2e^{2x} + c$$

$$\underline{y = \ln(2e^{2x} + c)}$$

$$y(0) = 0 = \ln(2e^{0} + c)$$

$$\ln(2+c)$$

så $c = -1$.

$$\underline{y(x) = \ln(2e^{2x} - 1)}$$