Oppsummering 20/4

Taylor-polynomer

- Lineariseringen til f omkring $x = x_0$ er Taylor-polynomet av grad 1:

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Generelt: Taylor-polynomet av grad n:

$$p_n(x)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2 \cdot 1} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

- Med summenotasjon:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Restleddsformelen

Taylors restleddsformel

$$f(x) = p_N(x) + R_N(x),$$

hvor

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}.$$

Her er c et tall mellom a og x.

Kan brukes til å estimere feilen vi får ved å erstatte funksjonen med Taylor-polynomet.

Taylor-rekker

- Taylors restleddsformel:

$$f(x) = p_N(x) + R_N(x),$$

Dersom

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0$$

kan vi ha

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} p_N(x).$$

Dette gir *Taylor-rekka*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k.$$

Plan for resten av undervisningen

- Komplekse tall
  - Det komplekse planet, Eulers formel
  - Komplekse ligninger
  - n'te-røtter
- Lineær algebra
  - Ligningssystemer, matriser og matriseoperasjoner
  - Determinanter
  - Transformasjoner
- Funksjonslære og derivasjon
  - Kontinuitet og deriverbarhet
  - Koblede hastigheter
  - Grenseverdier
  - Maksimums- og minimumspunkter
  - Numeriske metoder (halvering og Newton)

Mandag 25/4

Onsdag 27/4

Mandag 2/5

Plan for resten av undervisningen

- Integrasjon
  - Bestemt integral som grense av Riemannsum og som areal
  - Numerisk integrasjon (trapesmetoden og Simpsons metode)
  - Volum av omdreiningslegemer og buelengde
  - Analysens fundamentalteorem og antiderivasjon
- Differensialligninger
  - Retningsfelter og Eulers metode
  - Separable differensialligninger
  - Førsteordens lineære differensialligninger og integrerende faktor
  - Andreordens lineære differensialligninger med konstante koeffisienter
- Taylor-polynomer

Onsdag 4/5

Litt info

- Ny oblig lagt ut. Frist 6. mai kl 14.
- Sjekk antall godkjente obliger på Studentweb!
- Kursevaluering onsdag 27. apri
- Uke 19 (9. og 11. mai): Mulighet for gjennomgåelse av en eksamen.

Oppgave:

a) Regn ut Taylor-polynomet til $f(x) = \cos x$ av grad 4 omkring 0.

b) Bruk $p_4(x)$ til å estimere π.

Løsning:

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = -\sin 0 = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$$

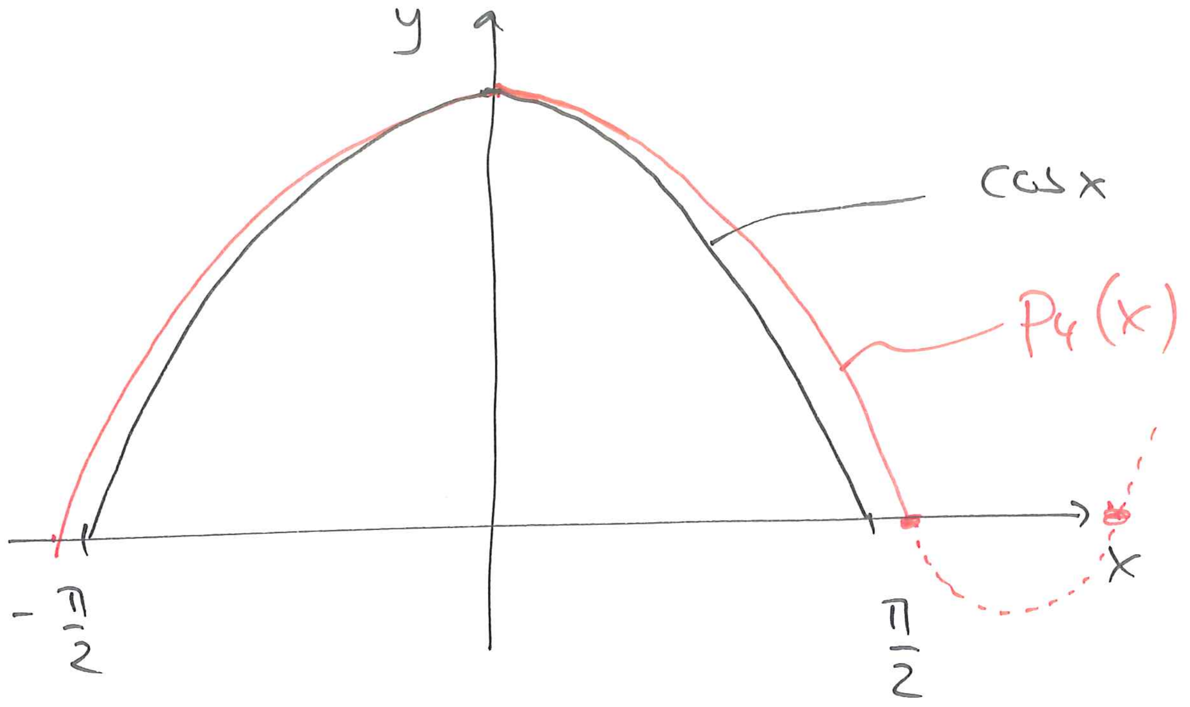
$$f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(0) = \sin 0 = 0$$

$$f^{(iv)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(iv)}(0) = \cos 0 = 1$$

a) $$p_4(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{3\cdot 2} f'''(0)x^3 + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2} f^{(iv)}(0)x^4$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(-1)x^2 + \frac{1}{24}\cdot 1\cdot x^4$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4}}$$



b) Nullpunktene til $P_4(x)$

$$\approx \frac{\pi}{2}$$

Regner ut

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 = 0$$

Fjerdegradsligning! Sett $u = x^2$!

$$1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{24}u^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad u^2 - 12u + 24 = 0$$

$$u = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2}$$

$$u = \frac{12 \pm \sqrt{144-96}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{2}$$

$4 \cdot 12$

$$= \frac{12 \pm 2\sqrt{12}}{2} = 6 \pm \sqrt{12}$$

Velger "$-$":

$u = x^2$: $\quad x^2 = 6 - \sqrt{12}$

$$x = \pm\sqrt{6-\sqrt{12}}$$

$\frac{\pi}{2} \approx$

$$\frac{\pi}{2} \approx \sqrt{6-\sqrt{12}}$$

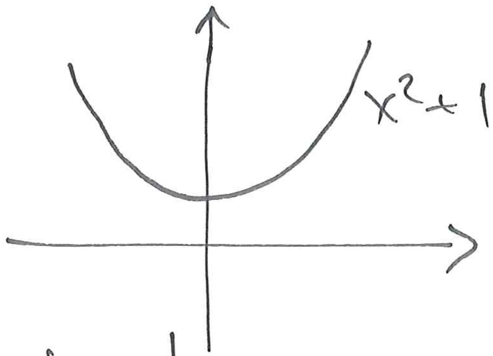
$$\pi \approx 2\sqrt{6-\sqrt{12}}$$

$$\approx 3{,}1849$$

Repetisjon

Komplekse tall

$$x^2 + 1 = 0$$



Ingen reelle løsninger!

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

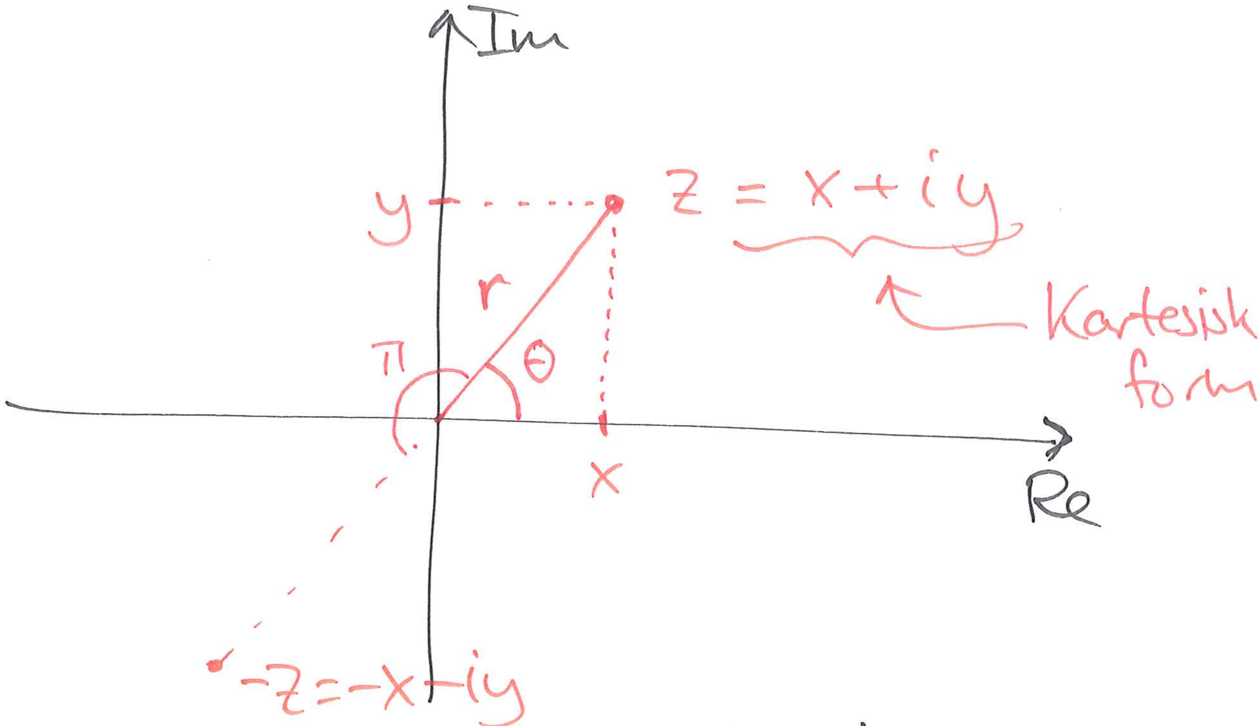
i - den imaginære enhet

$$x^2+1 = (x+i)(x-i)$$

$$= x^2 - i^2 \quad = -1$$

$$= x^2 - (-1) = x^2 + 1$$

Det komplekse planet



$$z = x + iy = \underbrace{r\cos\theta + ir\sin\theta}_{}\,,$$

Polar form

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Eulers formel:

$$\boxed{r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}}$$

Komplekse ligninger

Eksempel:

$$z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$$

2. gradsligning. Bruker ABC-formel:

$$z = \frac{-2(1+i) \pm \sqrt{\left(2(1+i)\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2i)}}{2}$$

$$= \frac{-2(1+i) \pm \sqrt{2^2(1+i)^2 + 4 \cdot 2i}}{2}$$

$$= \frac{-2(1+i) \pm \sqrt{4\left((1+i)^2 + 2i\right)}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}\left(-(1+i) \pm \cancel{2}\sqrt{(1+i)^2 + 2i}\right)}{\cancel{2}}$$

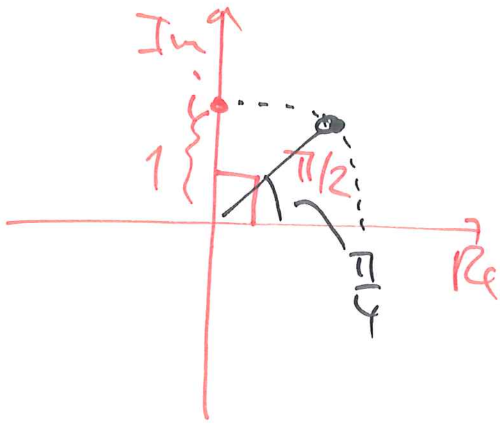
$$= -(1+i) \pm \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 + 2i}$$

$$= -(1+i) \pm \sqrt{\cancel{1-1} + 4i}$$

$$= -(1+i) \pm \sqrt{4i} = -(1+i) \pm 2\sqrt{i}$$

Skriv på kartesisk form $(a+ib)$:

$$\sqrt{i} = \sqrt{1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}}$$



$$= \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}.$$

$$z = -(1+i) \pm \cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}(1+i)$$

$$= (1+i)\left(-1 \pm \sqrt{2}\right)$$

$$z_1 = \underline{(1+i)(-1+\sqrt{2})}$$

$$z_2 = \underline{\underline{(1+i)(-1-\sqrt{2})}}$$

Eksempel:

Løs $z\bar{z} + 2iz = 1$

$\bar{z}$ = kompleks-konjugert til z

$\bar{z} = x - iy$

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy)$$

$$= x^2 - (iy)^2 = x^2 - \overbrace{i^2}^{=-1} y^2$$

$$= x^2 + y^2$$

Reelt
≥ 0

$$z\bar{z} - 1 = -2iz$$

Reelt
Reelt

Vs: Reell

Vs = Hs: $-2iz$ Reell.

Dvs iz er reell

Dvs $\boxed{z = ib!}$

Ukjent (foreløpig).

$$z\bar{z} + 2iz = 1 \qquad z = x + iy$$

$z = ib$:

$$ib \cdot (-ib) + 2i \cdot ib = 1$$

$$-\underbrace{i^2}_{-1} b^2 + 2\underbrace{i^2}_{=-1} b = 1$$

$$b^2 - 2b - 1 = 0$$

$$b = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1(-1)}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{8} &= \sqrt{4 \cdot 2} \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}\right\}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{2})}{2}$$

$$= \underline{1 \pm \sqrt{2}}$$

$$z = i(1 \pm \sqrt{2})$$

$$z_1 = i(1 + \sqrt{2}), \quad z_2 = i(1 - \sqrt{2})$$

$$z\bar{z} + 2iz = 1$$

$$z = x + iy$$

$$\Rightarrow z\bar{z} = \underline{x^2 + y^2}$$

$$2iz = 2i(x+iy)$$

$$= 2ix + 2\underbrace{i \cdot i}_{=-1}y$$

$$= \underline{i \cdot 2x - 2y}$$

$$x^2 + y^2 + i \cdot 2x - 2y = 1$$

$$\mathrm{Re}(Vs) = \mathrm{Re}(Hs)$$

$$\mathrm{Im}(Vs) = \mathrm{Im}(Hs)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Im}(Vs) = 2x \\ \mathrm{Im}(Hs) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x = 0}$$

$$\underbrace{y^2 - 2y - 1 = 0}_{\text{Allerede løst (for b).}}$$

n'te-røtter: $z^n = u$

Metode: Sett $z = re^{i\theta}$, $u = se^{i\alpha}$.

$$z^n = u \iff (re^{i\theta})^n = se^{i\alpha}$$

$$r^n (e^{i\theta})^n = s \cdot e^{i\alpha}$$

$$r^n e^{in\theta} = s \cdot e^{i\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad r^n = s \iff \boxed{r = \sqrt[n]{s} = s^{1/n}}$$

$$e^{in\theta} = e^{i\alpha}$$

$$e^{in\theta} = e^{i\alpha} \cdot e^{i2\pi \cdot m}$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$

$$e^{in\theta} = e^{i(\alpha + m \cdot 2\pi)}$$

$$n\theta = \alpha + m \cdot 2\pi$$

$$\theta = \frac{\alpha}{n} + m \cdot \frac{2\pi}{n},$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\theta_0 = \frac{\alpha}{n}$$

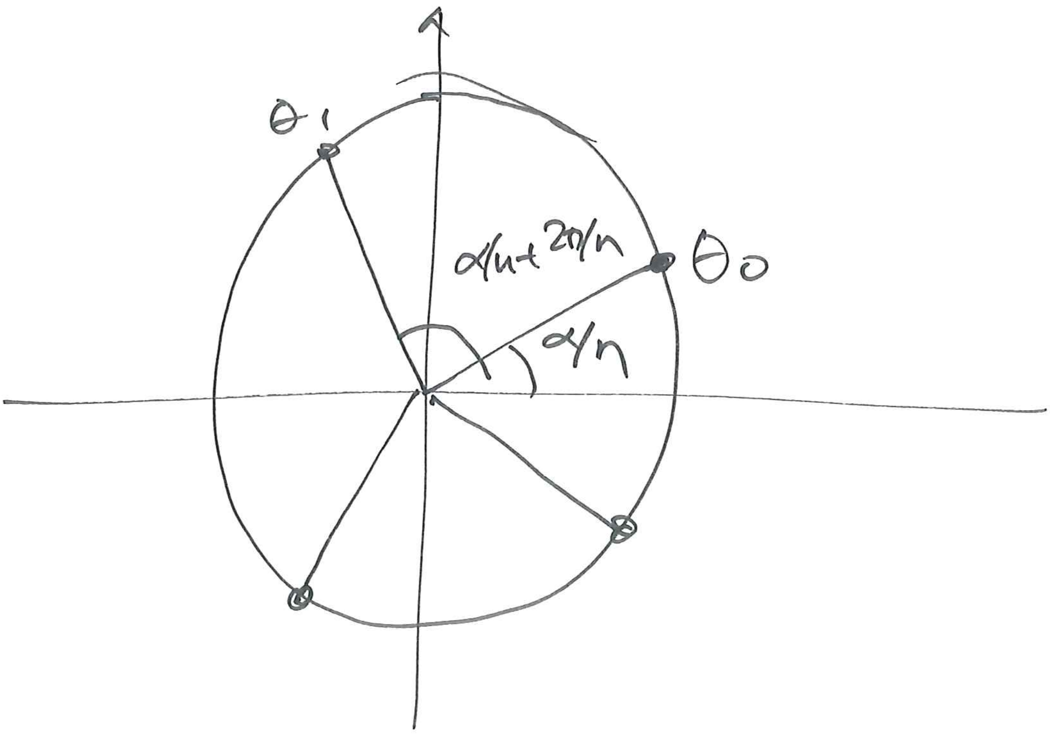
$$\theta_1 = \frac{\alpha}{n} + 1 \cdot \frac{2\pi}{n}$$

$$\theta_2 = \frac{\alpha}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}$$

$$\vdots$$

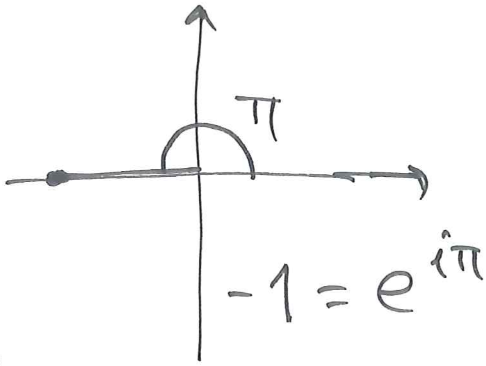
$$\theta_{n-1} = \frac{\alpha}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

$$\cancel{\theta_n = \frac{\alpha}{n} + n \cdot \frac{2\pi}{n}}$$



Eksempel: Løs $z^5 = -1$

$$z^5 = e^{i\pi}$$



Skriv $z = re^{i\theta}$:

$$\left(re^{i\theta}\right)^5 = 1 \cdot e^{i\pi}$$

$$r^5 e^{i5\theta} = 1 \cdot e^{i\pi}$$

$$r^5 = 1 \Leftrightarrow \underline{r = 1}$$

$$e^{i5\theta} = e^{i\pi} e^{i2\pi \cdot m}$$

$$(m = 0, 1, 2, 3, 4)$$

$$5\theta = \pi + 2\pi \cdot m$$

$$\theta = \frac{\pi}{5} + m\frac{2\pi}{5}, \quad m = 0, 1, \ldots, 5$$

$$\underline{\theta_0 = \frac{\pi}{5}, \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{5}}$$

$$\underline{\theta_2 = \pi, \quad \theta_3 = \frac{7\pi}{5}, \quad \theta_4 = \frac{9\pi}{5}}$$

Løsninger:

$$\underline{\underline{z_0 = e^{i\frac{\pi}{5}}, \quad z_1 = e^{i\frac{3\pi}{5}}}}$$

$$\underline{\underline{z_2 = e^{i\pi} = -1}}$$

$$\underline{\underline{z_3 = e^{i\frac{7\pi}{5}}, \quad z_4 = e^{i\frac{9\pi}{5}}}}$$