Oppsummering 18/4

Inhomogene andreordens lineære differensialligninger: når høyresiden er løsning av tilhørende homogen differensialligning

Eksempel:

$$y'' + py' + qy = 2e^{r_1 x},$$

hvor r_1 er løsning av den karakteristiske ligningen $r^2 + pr + q = 0$.

(Dvs høyresiden er løsning av tilhørende homogen differensialligning).

1. Vis at $Ae^{r_1 x}$ *ikke* er en partikulærløsning uansett verdi på A.
2. Vis at $xAe^{r_1 x}$ *er* en partikulærløsning for en eller annen verdi for A. Bestem denne verdien.

$$y'' + py' + qy = 2e^{r_1 x}$$

r_1 er løsning av $r^2 + pr + q = 0$

1. $Ae^{r_1 x}$ er <u>ikke</u> partikulær løsning:

$$y_p = Ae^{r_1 x}$$

$$y_p' = r_1 \cdot Ae^{r_1 x}$$

$$y_p'' = r_1^2 Ae^{r_1 x}$$

$$\begin{aligned} Vs &= y_p'' + py_p' + qy_p \\ &= r_1^2 Ae^{r_1 x} + pr_1 Ae^{r_1 x} + qAe^{r_1 x} \\ &= Ae^{r_1 x}\big(\underbrace{r_1^2 + pr_1 + q}_{=0}\big) \end{aligned}$$

$Vs = 0$ uansett valg av A.

Dvs: $y_p = Ae^{r_1 x}$ er <u>ikke</u> part. løsn.

2. $x \cdot Ae^{r_1 x}$ <u>er</u> en partikulær løsning:

$$y_p = xAe^{r_1 x}$$

$$y_p' = \underbrace{x \cdot r_1 Ae^{r_1 x}} + 1 \cdot Ae^{r_1 x}$$

$$y_p'' = x \cdot r_1^2 Ae^{r_1 x} + r_1 Ae^{r_1 x} + r_1 Ae^{r_1 x}$$

$$= x \cdot r_1^2 Ae^{r_1 x} + 2r_1 Ae^{r_1 x}$$

$$Vs = y_p'' + py_p' + qy_p$$

$$= x \cdot r_1^2 Ae^{r_1 x} + 2r_1 Ae^{r_1 x}$$

$$+ p\left(x \cdot r_1 Ae^{r_1 x} + Ae^{r_1 x}\right)$$

$$+ q \cdot x \cdot Ae^{r_1 x}$$

$$= x \cdot Ae^{r_1 x}\left(\overbrace{r_1^2 + pr_1 + q}^{= 0}\right)$$

$$+ 2r_1 Ae^{r_1 x} + p \cdot Ae^{r_1 x}$$

$$Vs = Ae^{r_1 x}(2r_1 + p)$$

$$= A(2r_1 + p) \cdot e^{r_1 x}$$

$$\parallel$$

$$Hs = 2 \cdot e^{r_1 x}$$

$$Vs = Hs$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot (2r_1 + p) = 2$$

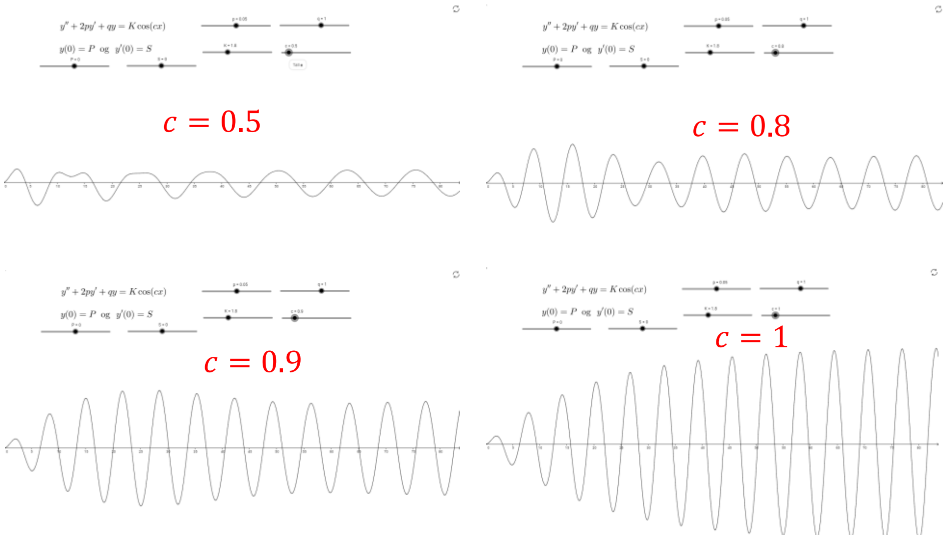
$$A = \frac{2}{2r_1 + p}$$

$$y_p(x) = x \cdot A e^{r_1 x}$$

$$= \frac{2}{2r_1 + p} x e^{r_1 x}$$

Resonans i $y'' + 2py' + qy = K\cos(cx)$

$p \neq 0$: Dempning i systemet. Systemets egenfrekvens = 1.
Vi varierer verdien til c.



Taylor-polynomer

- Lineariseringen til f omkring $x = x_0$ er Taylor-polynomet av grad 1:

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Generelt: Taylor-polynomet av grad n:

$$p_n(x)$$

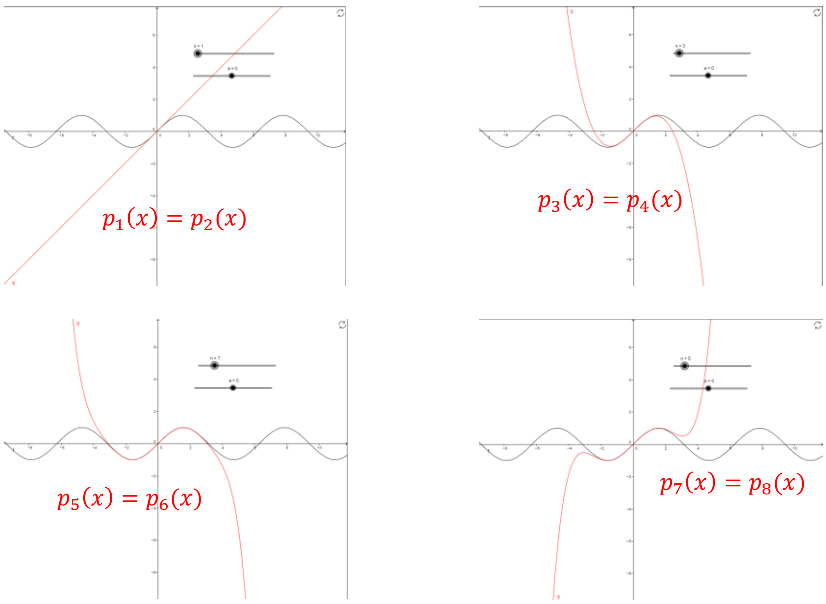
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2 \cdot 1} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

- Med summenotasjon:

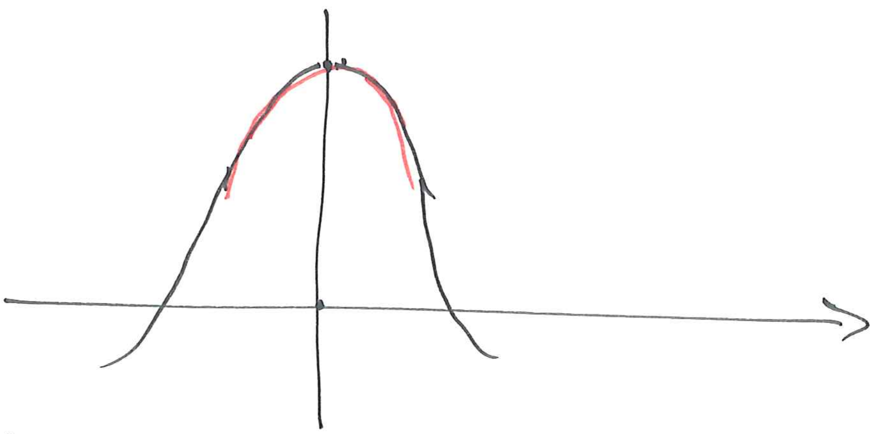
$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

Taylor-polynomer til $\sin x$ omkring $x = 0$



Oppgave :

Regn ut Taylorpolynomet til $f(x) = \cos x$ av grad 4 omkring $x = 0$.



Løsning :

$$P_4(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2 \cdot 1} f''(0)\, x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} f'''(0) x^3 + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} f^{(IV)}(0)\, x^4$$

$$f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = -\sin 0 = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(IV)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(IV)}(0) = 1$$

Svar:

$$p_4(x) = 1 - \frac{1}{2\cdot 1}x^2 + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^4$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

$$g(x) = \cos(x^2)$$

Taylor-polynomet av grad 4?

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = f(x^2)$$

$$\Rightarrow p_4(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2)^2$$

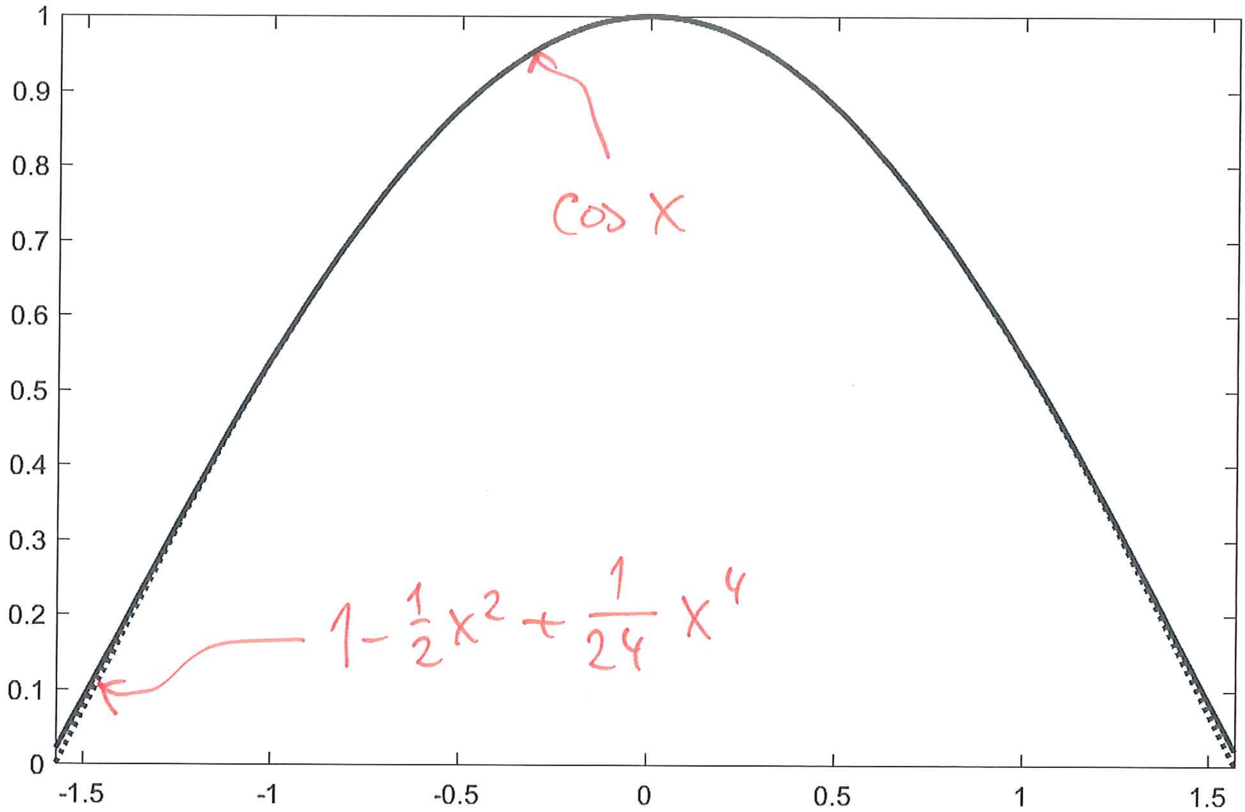
$$= 1 - \frac{1}{2}x^4$$

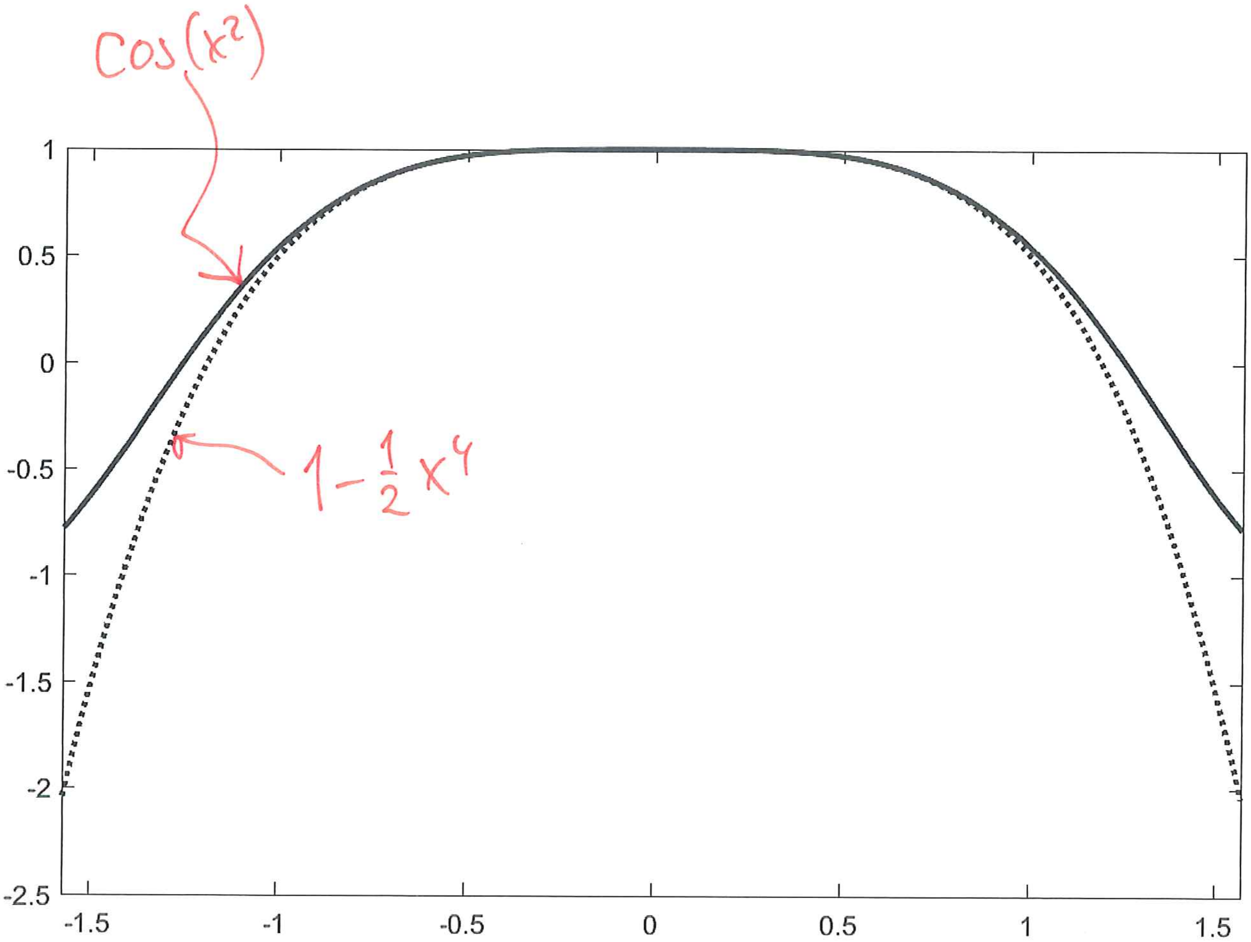
Kommentar:

$$f^{(4)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(5)}(x) = -\sin x$$

$$\Rightarrow f^{(5)}(0) = 0$$

$$p_5(x) = p_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$


cos x
$1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$


cos(x²)
$1-\frac{1}{2}x^4$

Feilskranker

Taylors formel for restledd

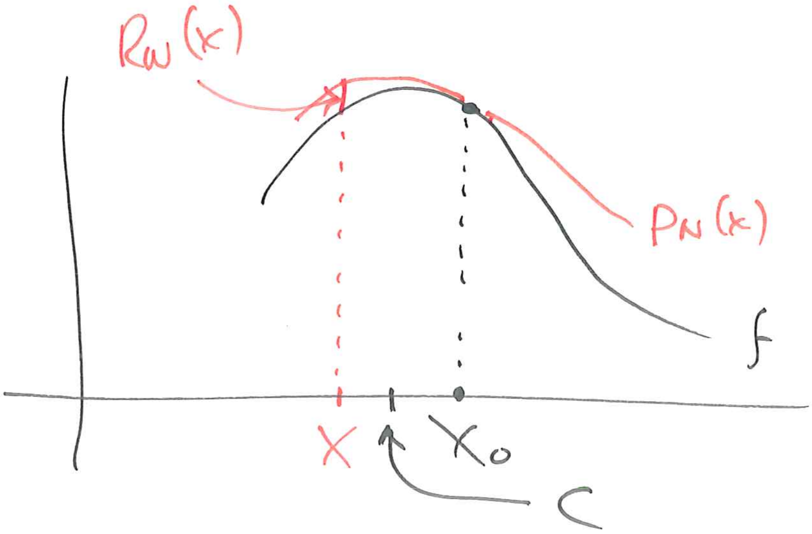
Anta at f er $N+1$ ganger deriverbar på et intervall som inneholder x_0 og x. Da er

$$f(x) = P_N(x) + R_N(x),$$

hvor

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}.$$

Her er c mellom x_0 og x.



Eksempel:

$$f(x) = \cos x$$

$$p_5(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

(Taylor-polynomet omkring 0, grad 5).

Hvor stor feil gjør vi hvis vi benytter $p_5(x)$ til å beregne $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$?

Fasit: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866025$

Taylors restleddsformel:

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}x^6, \quad c \text{ ligger mellom } 0 \text{ og } x.$$

$$R_5\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^6$$

$$\left|R_5\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = \frac{|f^{(6)}(c)|}{6!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^6 = \frac{\overbrace{|\cos c|}^{\leq 1}}{6!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^6$$

$$\leq \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^6 \simeq 0{,}0000286$$

Hva blir feilen?

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - P_5\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{6}\right)^4\right)\right|$$

$$= \underline{0{,}0000285}$$

Anvendelse av Taylor-polynomer: Løsning av bestemte integraler

Husk at Taylor-polynomet av grad n omkring $x=0$ for $f(x) = e^x$ er

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Dermed er Taylor-polynomet av grad $2n$ til $g(x) = e^{x^2}$ er:

$$q_{2n}(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}(x^2)^2 + \frac{1}{6}(x^2)^3 + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}(x^n)^2$$

$$= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \cdots\cdots + \frac{1}{n!}x^{2n}$$

Oppgave: Bruk $q_6(x)$ til å beregne $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ tilnærmet:

For x "nær 0" er

$$e^{x^2} \simeq q_6(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6$$

Dvs:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \simeq \int_0^1 q_6(x)\,dx$$

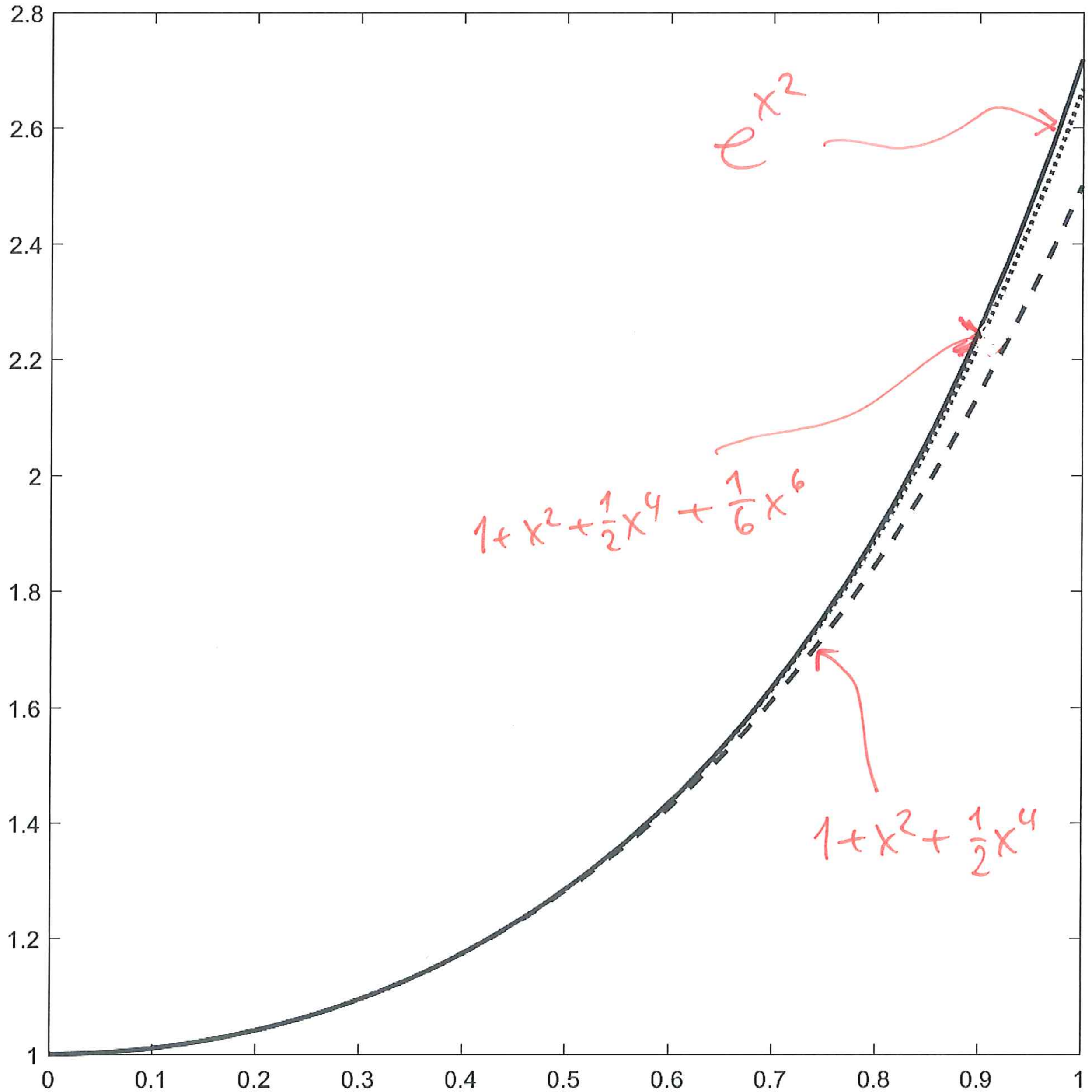
$$= \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6\right) dx$$

$$= \left[x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}x^7\right]_0^1$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} \simeq \underline{1{,}46264}$$

Simpsons metode: $\simeq \underline{1{,}46265}$

Bra!


2.8
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
e^{x^2}
$1+x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{6}x^6$
$1+x^2+\frac{1}{2}x^4$

Taylorrekker (7.4)

$$f(x) = p_N(x) + R_N(x)$$

Vil

$$p_N(x) \longrightarrow f(x) \text{ når } N \to \infty$$

dersom

$$R_N(x) \longrightarrow 0 \text{ når } N \to \infty ?$$

Svaret er ja og:

$$\lim_{N\to\infty} p_N(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}$$

kalles for Taylorrekka til f.
(omkring $x = x_0$).

Eksempel:

Taylor-polynomet til e^x omkring 0:

$$p_N(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

Taylor-rekka blir:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Eksempel:

Regn ut Taylor-rekka til

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{omkring } x = 0.$$

$$f(x) = (1-x)^{-1}$$

$$f'(x) = (-1)(1-x)^{-1-1}(-1) = 1(1-x)^{-2}$$

$$f''(x) = (-2)(1-x)^{-2-1}(-1) = 2\cdot 1(1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = (-3)\cdot 2(1-x)^{-3-1}(-1) = 3\cdot 2\cdot 1(1-x)^{-4}$$

$$f^{(n)}(x) = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}_{=n!}(1-x)^{-(n+1)}$$

$$f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)}$$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = n!\,(1-0)^{-(n+1)} = n!$$

Taylor-polynomet av grad N:

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{N} x^n$$

$$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^N$$

Dvs. Taylor-rekka (Maclaurin-rekka)

er

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^N + \cdots$$

(Den geometriske rekka).