Oppsummering 13/4

Andreordens lineær differensialligning med konstante koeffisienter

- På formen

$$y'' + py' + qy = 0$$

- Karakteristisk ligning (fås ved å anta $y = e^{rx}$)

$$r^2 + pr + q = 0$$

- Tre tilfeller:
  - To ulike reelle røtter r_1 og r_2: $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
  - To like reelle røtter r: $y = Ae^{rx} + Bxe^{rx}$
  - To ulike komplekse røtter $a + ib$ og $a - ib$:
    $y = e^{ax}(\,C\cos(bx) + D\sin(bx))$

Andreordens lineær differensialligning med konstante koeffisienter, inhomogen

- På formen

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad f(x) \neq 0,$$

- Generell løsning er på formen

$$y = y_H(x) + y_P(x),$$

hvor y_H er løsning av tilhørende homogen ($f(x) = 0$)

- Tre tilfeller:
  - $f(x)$ er polynom av grad n: Se etter y_P = polynom av grad n
  - $f(x)$ er $\sin(ax)$ og $\cos(ax)$ (eller kombinasjon): $y_P = A\sin(ax) + B\cos(ax)$
  - $f(x)$ er eksponensialfunksjon e^{ax}: $y_P = Ke^{ax}$
  - Bestem til slutt koeffisientene (*ubestemte koeffisienters metode*)

Oppsummerende oppgave

1. Bestem generell løsning til

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

2. Bestem partikulær løsning til

$$y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}$$

og skriv så opp generell løsning.

3. Finn løsningen av startverdiproblemet

$$y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

1. Generell løsning til

$$y'' + 4y' + 3y = 0 :$$

Karakteristisk ligning:

$$r^2 + 4r + 3 = 0$$

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$\underline{r_1 = -1}$, $\underline{r_2 = -3}$

$$y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$

$$= \underline{\underline{Ce^{-x} + De^{-3x}}}$$

2. Partikulær løsning til

$$y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}$$

Høyresiden er på formen e^{ax}

$\Rightarrow$ Ser etter $\underline{y_p(x) = Ke^{-2x}}$

$$y_p'(x) = Ke^{-2x}\cdot(-2)$$

$$y_p''(x) = Ke^{-2x}\underbrace{(-2)(-2)}_{=4}$$

$$\begin{aligned}
Vs &= y_p'' + 4y_p' + 3y_p \\
&= K\cdot e^{-2x}\cdot 4 + 4\cdot Ke^{-2x}\cdot(-2) + 3\cdot Ke^{-2x} \\
&= Ke^{-2x}\big(\underbrace{4 + 4(-2) + 3}_{4-8+3=-1}\big) \\
&= -Ke^{-2x}
\end{aligned}$$

$Vs = Hs$: $\quad -K\cdot e^{-2x} = e^{-2x}$

$$-K = 1 \Leftrightarrow \underline{K = -1}$$

$$\underline{\underline{y_p(x) = -e^{-2x}}}$$

3. Løsning av startverdiproblemet

$y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0:$

Generell løsning:

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$
$$= Ce^{-x} + De^{-3x} - e^{-2x}$$

$$y'(x) = -Ce^{-x} - 3De^{-3x} + 2e^{-2x}$$

$y(0) = 0$:

$$Ce^{0} + De^{0} - e^{0} = 0$$
$$C + D - 1 = 0$$

$y'(0) = 0$:

$$-C - 3D + 2 = 0$$

Legger sammen:

$$D - 1 - 3D + 2 = 0$$
$$-2D + 1 = 0$$

$$2D = 1$$

$$\underline{D = \frac{1}{2}}$$

$$C + D - 1 = 0$$

$$C + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$\underline{C = \frac{1}{2}}$$

$$y(x) = Ce^{-x} + De^{-3x} - e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-3x} - e^{-2x}$$

Eksempel (resonans)

$$y'' + 4y = \cos(\omega t) \leftarrow \text{"kraft påtrykt"}$$

KL: $r^2+4=0$

$r = \pm 2i$

$$y_H(t) = C\cos(2t) + D\sin(2t)$$

"Egenfrekvens"

Partikulærløsning:

$$y_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$y_p' = -A\sin(\omega t)\cdot\omega + B\cos(\omega t)\cdot\omega$$

$$y_p'' = -A\cos(\omega t)\cdot\omega^2 - B\sin(\omega t)\cdot\omega^2$$

$$= -\cancel{A}\omega^2 \cdot y_p(t)$$

$$VS = y_p'' + 4y_p$$

$$= -\cancel{A}\omega^2 \cdot y_p + 4y_p$$

$$= (4-\cancel{A}\omega^2)y_p = (4-\omega^2)(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

$$HS = \cos\omega t$$

$$VS = (4-\omega^2)A \cdot \cos\omega t + (4-\omega^2)B \cdot \sin\omega t$$

$$HS = 1 \cdot \cos\omega t + 0 \cdot \sin\omega t$$

$$(4-\omega^2)A = 1 \qquad (4-\omega^2)B = 0$$

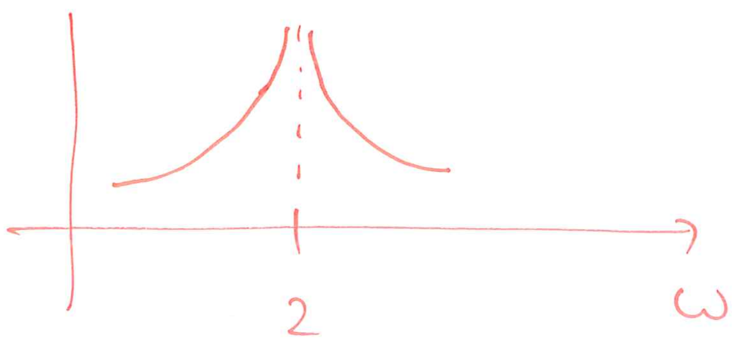
$$A = \frac{1}{4-\omega^2} \qquad B = 0$$

$$y_p(t) = \frac{1}{4-\omega^2}\cos\omega t$$

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t)$$

$$= C\cos(2t) + D\sin(2t) + \underbrace{\frac{1}{4-\omega^2}}\cos(\omega t)$$

$\omega \to 2$. Hva skjer?



Hva gjør vi når $\omega = 2$?

$$y'' + 4y = \cos(2t)$$

Partikulærløsningen $y_p = A\cos(2t)$ funker ikke!

$$y_p'' = -4A\cos 2t$$

$$\Rightarrow 0 = y_p'' + 4y_p = -4A\cos 2t + 4A\cos 2t = 0$$

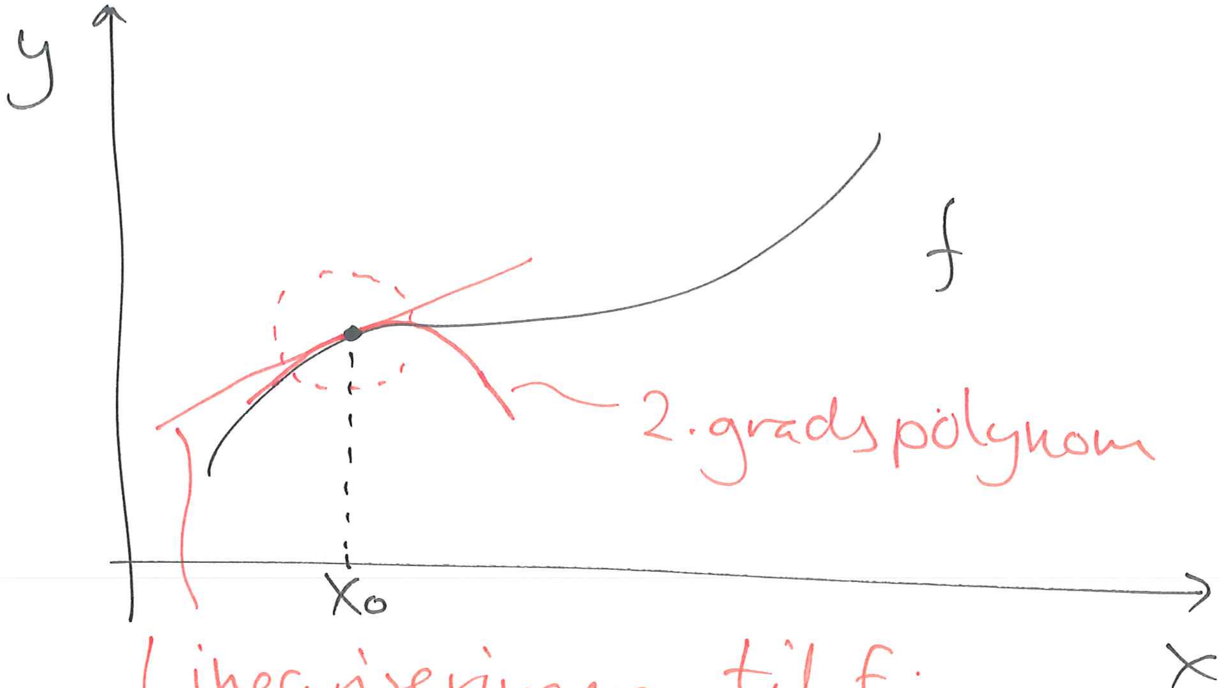
Må prøve $y_p(t) = At\cos(2t) + Bt\sin(2t)$

Kan vise at

$$y_p(t) = \underbrace{\tfrac{1}{4}t}\sin(2t).$$

Amplituden vokser som funksjon av t.

Taylor-polynomer (3.5)



Linearisieringen til f:

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$$

0) $p_2(x_0) = f(x_0)$

1) $p_2'(x_0) = f'(x_0)$

2) $p_2''(x_0) = f''(x_0)$

$$p_2'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0)$$

$$p_2''(x) = 2a_2$$

Tre betingelser:

0) $p_2(x_0) = f(x_0)$:

$$a_0 + a_1\cancel{(x_0 - x_0)} + a_2\cancel{(x_0 - x_0)^2} = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \underline{a_0 = f(x_0)}$$

1) $p_2'(x_0) = f'(x_0)$:

$$a_1 + 2a_2\cancel{(x_0 - x_0)} = f'(x_0)$$

$$\underline{a_1 = f'(x_0)}$$

2) $p_2''(x_0) = f''(x_0)$:

$$2a_2 = f''(x_0)$$

$$\underline{a_2 = \tfrac{1}{2} f''(x_0)}$$

$$\boxed{p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}$$

Taylor-polynomet av grad 2 til f omkring $x = x_0$

Taylor-polynomet av grad n:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+ \frac{1}{\underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{=3!}} f'''(x_0)(x-x_0)^3$$

$$+ \frac{1}{\underbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{=4!}} f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^4 + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{\underbrace{n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}_{=n!}} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

$0! = 1$ (per def)

Eksempel: Hva er Taylor-polynomet til $f(x) = e^x$ omkring $x = 0$ av grad 3?

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2} f'''(x_0)(x - x_0)^3.$$

Her: $f(x) = e^x$

$$f'(x) = e^x = f''(x) = f'''(x).$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = e^0 = \underline{1}$$

Dvs:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 + \frac{1}{6} f'''(0) x^3$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3$$

Eksempel: Taylorpolynomet til $f(x) = \sin x$ omkring $x_0 = \frac{\pi}{2}$, grad 2.

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

Her: $f(x) = \sin x \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = 1$

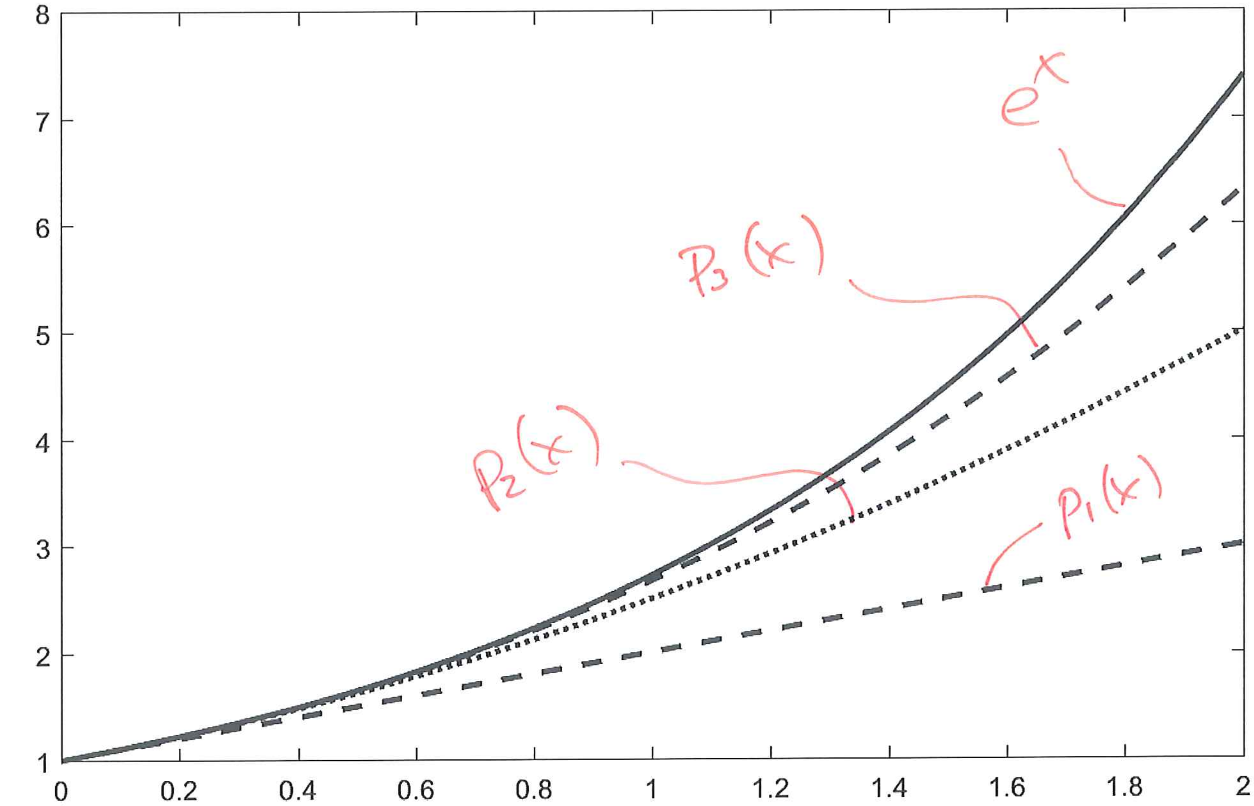
$\Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = 0$

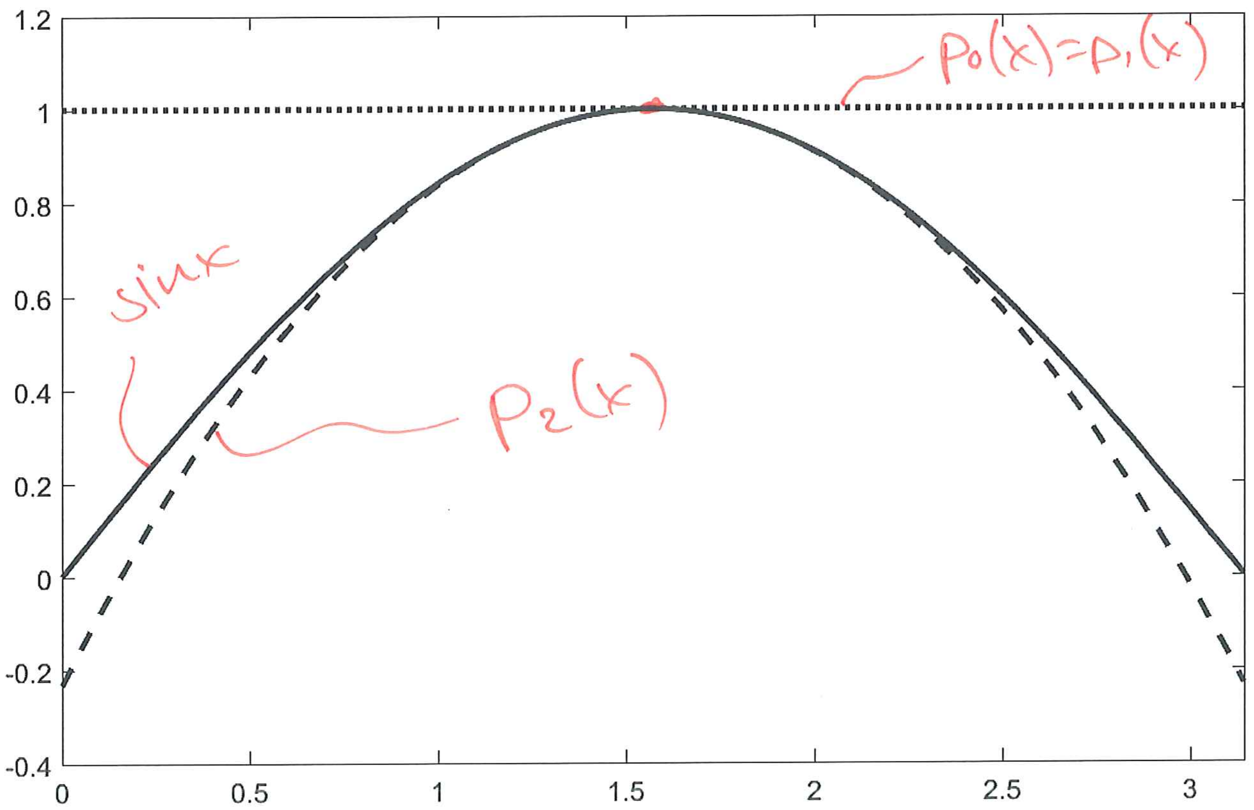
$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(\frac{\pi}{2}) = -1$

Dvs:

$$P_2(x) = 1 + 0\cdot(x-\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{2}(-1)(x-\tfrac{\pi}{2})^2$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}(x-\tfrac{\pi}{2})^2$$


8
7
6
5
4
3
2
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
e^x
$p_3(x)$
$p_2(x)$
$p_1(x)$


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
$p_0(x)=p_1(x)$
$\sin x$
$p_2(x)$