Repetisjon fra forelesning 9. mars

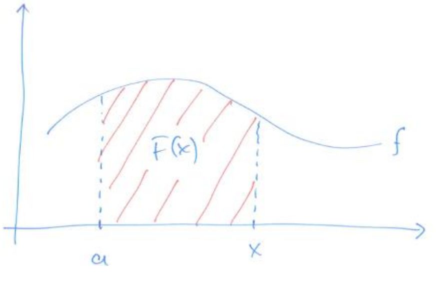
Analysens fundamentalteorem

Del 1: $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$

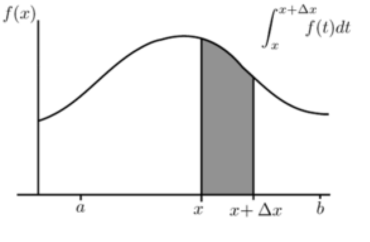
Antiderivert til f

Del 2: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

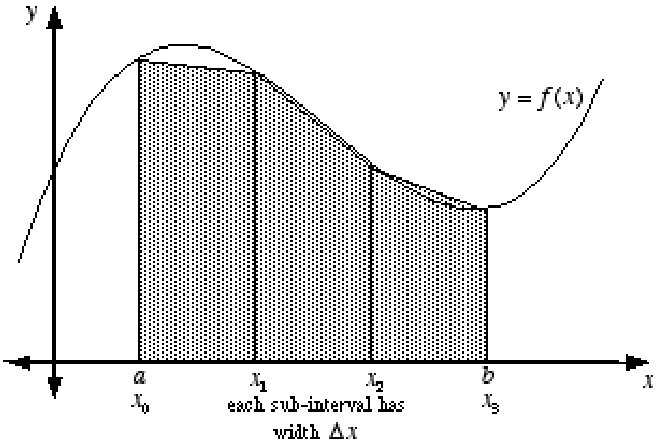
$F(x)$ er et areal:



Grafisk bevis for del 1:
$(F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt)$



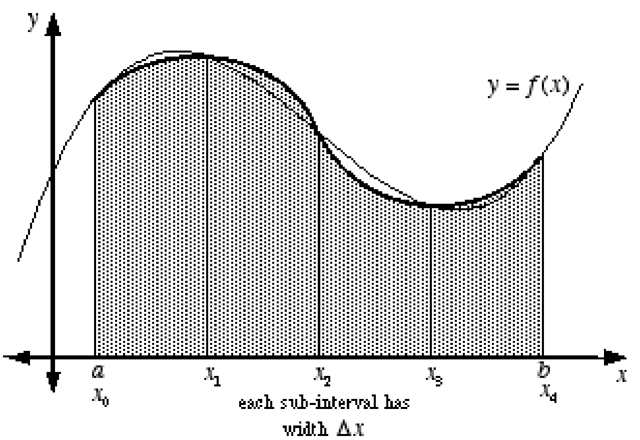
Numerisk integrasjon: trapesmetoden



The area of the trapezoids (shaded) approximately equals the area bounded by $y = f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_3)\right].$$

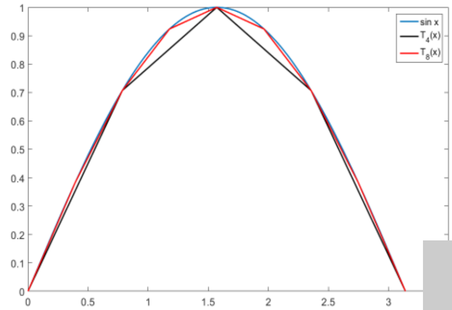
Numerisk integrasjon: Simpsons metode

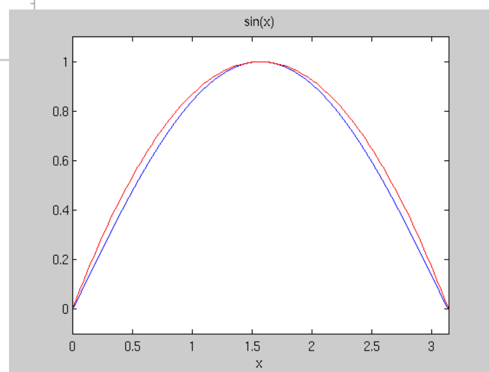


The shaded area bounded by the parabolas (the thicker curves) is approximately equal to the area bounded by $y = f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

Beregning av $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ ved numerisk integrasjon





Nøyaktighet og feilskranker

$$|E_T| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \qquad |E_S| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$$

Fordobling av antall delintervaller skal gi reduksjon av feil med faktor 4

$\boxed{|I - T_n|}$

$\boxed{|I - S_{2m}|}$

Fordobling av antall delintervaller skal gi reduksjon av feil med faktor 16

Eksempel: $f(x) = \sin x$

n	T_n	$\lvert I - T_n \rvert$	$\frac{\lvert I - T_n \rvert}{\lvert I - T_{n-1} \rvert}$	$\lvert I - S_{2m} \rvert$	$\lvert I - S_{2m} \rvert$	$\frac{\lvert I - S_{2m} \rvert}{\lvert I - S_{2(m-1)} \rvert}$
4	1.8961	0.1039		2.00455975	0.00455975	
8	1.9742	0.0258	4.0313	2.00026917	0.00026917	16.94
16	1.9936	0.0064	4.0077	2.00001659	0.00001659	16.22
32	1.9984	0.0016	4.0019	2.00000103	0.00000103	16.06

Oppgave

Regn ut $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ ved bruk av

- Trapesmetoden:

$T_n = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$

- Simpsons metode:

$S_{2m} = \dfrac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 4y_{2m-2} + 2y_{2m-1} + y_{2m})$

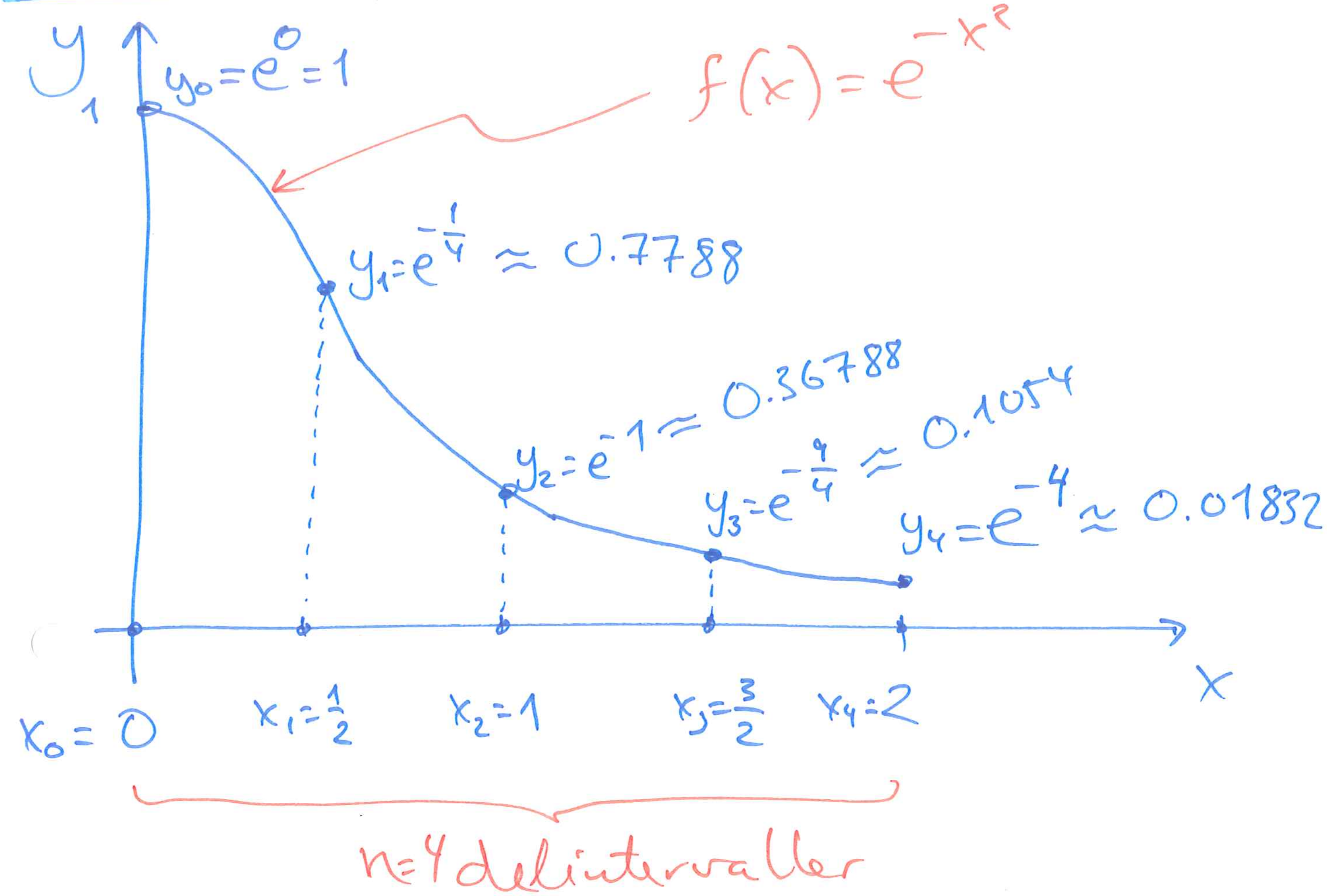
og $n = 2m = 4$.

Fasit: ca 0.8821

I dag

- Litt om uegentlige integraler (5.5)
- Kort om antiderivasjon (4.3)
- Regler for antiderivasjon (4.4)
  - Integrasjon ved substitusjon
  - Delvis integrasjon

Eksempel:



Trapesmetoden:

$$T_4 = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right)$$

$$= \frac{1/2}{2}\left(1 + 2\cdot 0.7788 + 2\cdot 0.36788 + 2\cdot 0.1054 + 0.01832\right)$$

$$\approx \underline{0.8806}$$

Simpsons metode:

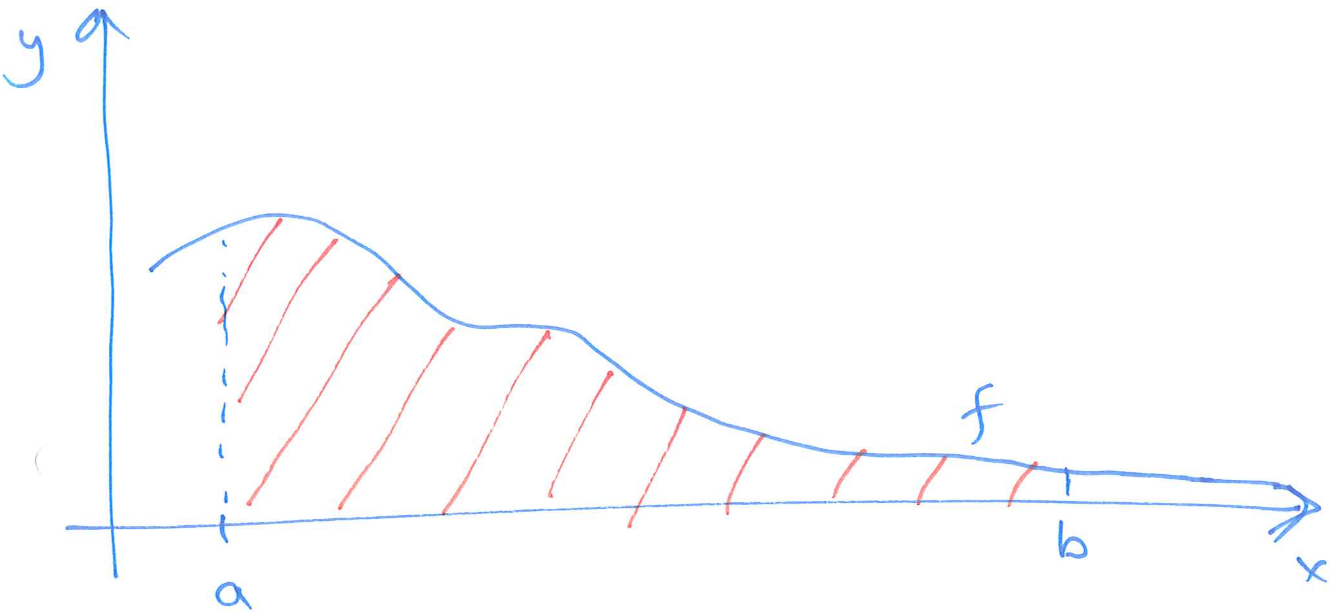
$$S_4 = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$

$$= \frac{1/2}{3}\left(1 + 4 \cdot 0.7788 + 2 \cdot 0.36788 + 4 \cdot 0.1054 + 0.01832\right)$$

$$\approx \underline{\underline{0.8818}}$$

Fasit: $\approx \underline{0.8821}$

Uegentlige integraler (5.5)

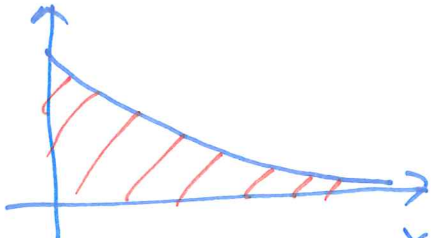


$$\underbrace{\int_a^\infty f(x)\,dx}_{} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

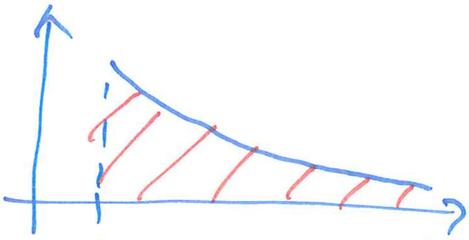
Uegentlig integral med ubegrenset intervall.

Eksempler:

a) Konvergerer $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$?



b) Konvergerer $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$?



Løsning:

a) $\int_0^\infty \overset{f(x)}{e^{-x}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx$

$= \lim_{b\to\infty} \Big[-\underbrace{e^{-x}}_{F(x)} \Big]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b} - (-e^{-0}) \right)$

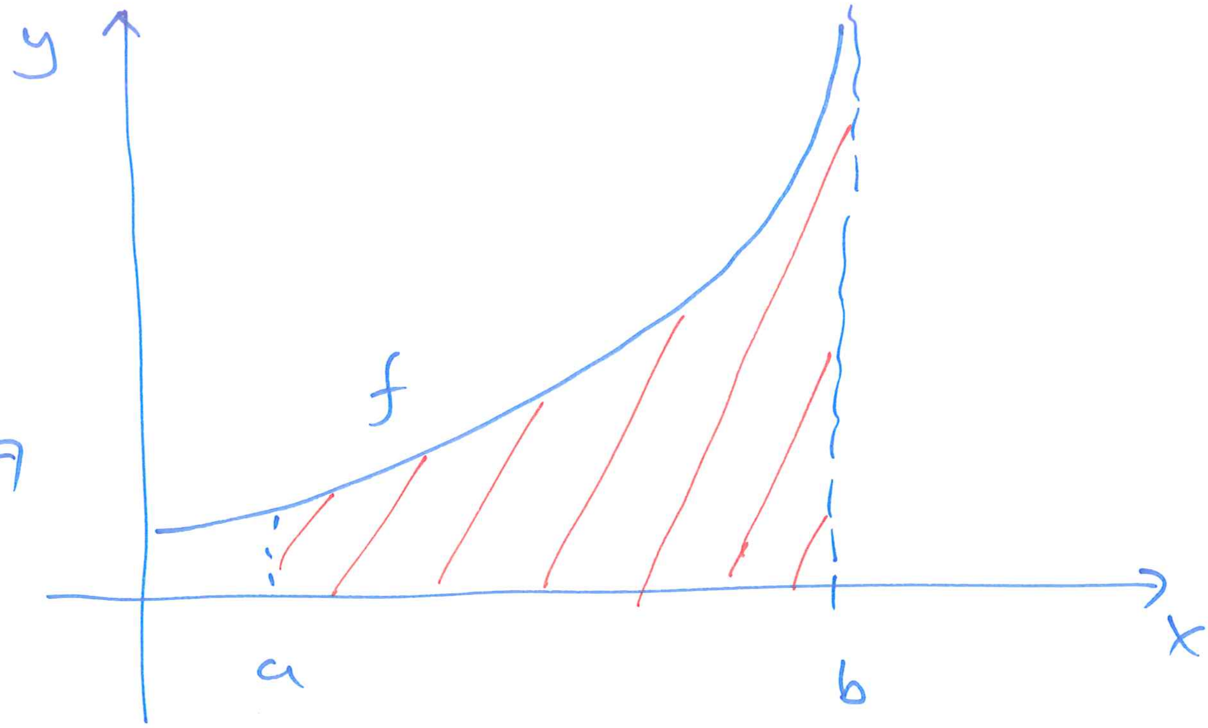
$= \lim_{b\to\infty} \left(1 - \underbrace{e^{-b}}_{=\frac{1}{e^b}} \right) = \underline{\underline{1}}$

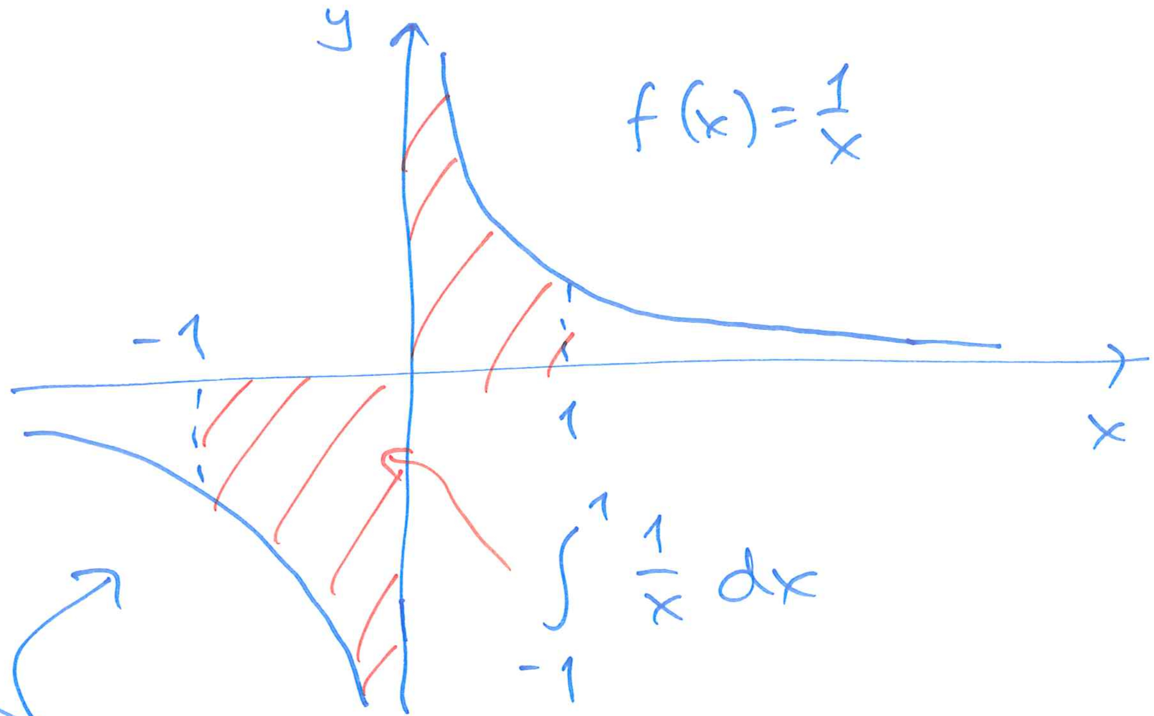
b) $\int_1^\infty \overset{f(x)}{\frac{1}{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \Big[\overset{F(x)}{\ln x} \Big]_1^b$

$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln b - \overset{=0}{\ln 1} \right] = \lim_{b\to\infty} \ln b$

$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ eksisterer ikke / divergerer!

Grensen eksisterer ikke!



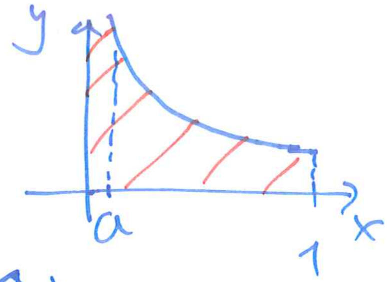


Uegentlige integraler med ubegrensede integrander.

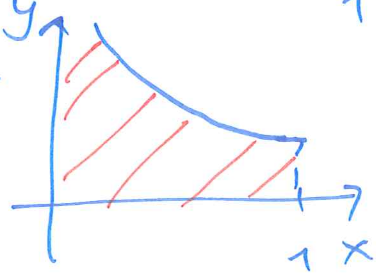
Funksjon å integrere.

Eksempler:

a) Konvergerer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$?



b) Konvergerer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$?



Løsning:

a) $$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\Big[\ln x\Big]_a^1$$

$$= \lim_{a\to 0^+}(\ln 1 - \ln a)$$

$$= -\underbrace{\lim_{a\to 0^+}\ln a}$$ ← Eksisterer ikke!

Dvs $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergerer!

b) $$\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{x^{-1/2}}\,dx = \int_0^1 x^{-1/2}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-1/2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{1}{-1/2+1}x^{-1/2+1}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{1}{1/2}\Big(1-\underbrace{a^{1/2}}_{=\sqrt{a}}\Big)\right]$$

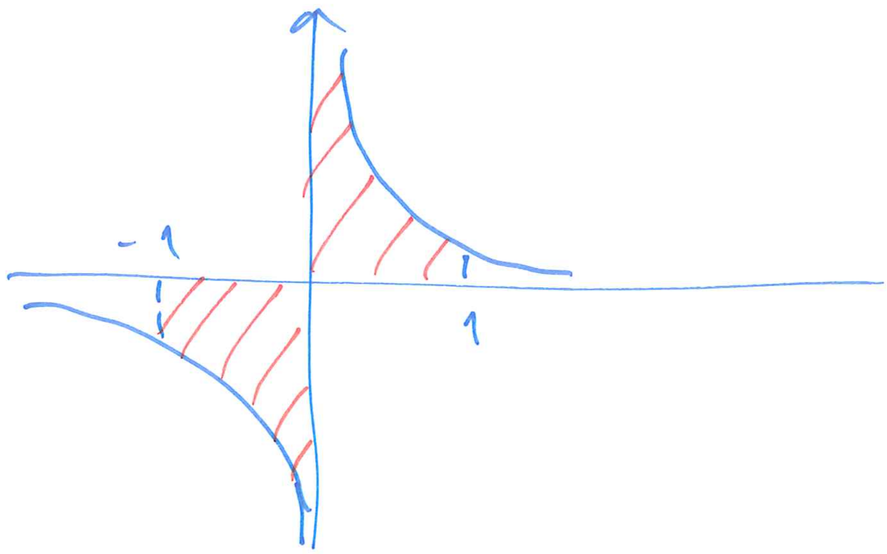
$$= \frac{1}{1/2}(1-0) = \underline{2}.$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

Dvs. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergerer.

Advarsel:

Hva med $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$?



Kan vi skrive

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1} \; ?$$

Nei, fordi

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx}_{} + \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx}_{}$$

Divergerer

$$\cancel{\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2}$$

FEIL!

Antiderivasjon (4.3)

Integrasjonsregler

Generelle integrasjonsregler

1	$\int af + bg \, dx$	$=$	$a \int f \, dx + b \int g \, dx$	Linearitet
2	$\int u \cdot v' \, dx$	$=$	$uv - \int u' \cdot v \, dx$	Delvis integrasjon
4	$\int f(u(x)) \cdot u'(x) \, dx$	$=$	$\int f(u) \, du$	Substitusjon

Integralet av spesielle funksjoner

5	$\int a \, dx$	$=$	$ax + C$	Integrasjon av konstant
6	$\int x^r \, dx$	$=$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$	$r \neq -1$ (Se 11 for $r = -1$)
7	$\int \cos(x) \, dx$	$=$	$\sin(x) + C$	
8	$\int \sin(x) \, dx$	$=$	$-\cos(x) + C$	
10	$\int e^x \, dx$	$=$	$e^x + C$	
11	$\int x^{-1} \, dx$	$=$	$\ln(\lvert x \rvert) + C$	
12	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$	$=$	$\arcsin(x) + C$	
13	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$	$=$	$\arctan(x) + C$	

Bestemte integraler

14) Hvis $f(x)$ er kontinuerlig og $F'(x) = f(x)$ er $\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

15) Integrasjon over sammensatt område, A er disjunkt union av intervallene $[a, c]$ og $[d, b]$:

$$\int_A f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_d^b f(x) \, dx \,. \quad \text{Spesielt} \quad \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \,.$$

16) Ombytting av grenser: $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$.

17) Substitusjon: $\int_a^b f(u(x)) u'(x) \, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) \, du$.

September 2003, Hans Petter Hornæs

Metoder for antiderivasjon (4.4)

Substitusjon

Kjerneregelen: $F = F(u(x))$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[F] = F'(u)\cdot u'(x)$$

Anta at F er antiderivert til en f $\quad (F'(u) = f(u))$

Så er

$$F(u) = \int f(u)u'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(u)\,du = \int f(u)\,u'(x)\,dx}$$

"Formel" for integrasjon ved substitusjon.

"Oppskrift":

Vi har integral på formen

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx$$

1. Velg hva som skal være $u(x)$.
2. Siden $u'(x) = \frac{du}{dx}$ kan skrives om til $dx = \frac{du}{u'(x)}$, så erstattes dx med $\frac{du}{u'(x)}$.
3. x-ene som er igjen i integranden etter punkt 2, skrives om til et uttrykk i u (hvis mulig, ellers gå til punkt 1 og prøv igjen.

Eksempel:

Regn ut $\int x e^{x^2} dx$

Husk: $\int f(u(x))\, u'(x)\, dx$

Løsning:

Prøver $u(x) = x^2$. Da er $u'(x) = 2x$.

$$dx = \frac{du}{u'(x)} = \frac{du}{2x}.$$

$$\int x e^{x^2} dx = \int \cancel{x} e^u \frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int e^u du$$

$$= \frac{1}{2} e^u + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{x^2} + C}}$$

Kontroll:

$$\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C\right)' = \frac{1}{\cancel{2}} e^{x^2} \cdot \cancel{2}x = \underline{x e^{x^2}}$$

Ok!

Eksempel.

Regn ut $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

Husk at $\int f(u(x))\, u'(x)\, dx$

Prøver med $u = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{u'(x)} = -\frac{du}{\sin x}$$

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int \sin^{\cancel{2}} x \cdot u \left(-\frac{du}{\cancel{\sin x}}\right)$$

$$= -\int \sin x \cdot u \, du$$

Unødvendig komplisert.

Prøver heller med $u = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int u^2 \cancel{\cos x} \frac{du}{\cancel{\cos x}} = \int u^2 \, du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 + C$$

$$= \underline{\frac{1}{3} \sin^3 x + C}$$

Kontroll: $\left(\frac{1}{3} \sin^3 x + C\right)' = \underline{\sin^2 x \cdot \cos x}$ ok

Delvis integrasjon

Derivasjon av produkter:

$$[u(x)v(x)]' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$$

$$\int [u(x)v(x)]'\,dx = \int u(x)v'(x)\,dx + \int u'(x)v(x)\,dx$$

$$u(x)v(x) = \int u(x)v'(x)\,dx + \int u'(x)v(x)\,dx$$

Dermed:

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx}$$

Formelen for delvis integrasjon.

Hensikt: Velg $u(x)$ og $v'(x)$ slik at $\int u'(x)v(x)\,dx$ er lettere å løse enn $\int u(x)v'(x)\,dx$!

Eksempel:

Regn ut $\int x e^x \, dx$

Husk: $\int u(x) v'(x) \, dx$

Valg (I): $u(x) = e^x$, $v'(x) = x$

Valg (II): $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$

Prøver (I):

$$u(x) = e^x, \quad u'(x) = e^x$$

$$v'(x) = x, \quad v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\underbrace{\int x e^x \, dx}_{v' \cdot u} = \underbrace{\frac{1}{2}x^2 \cdot e^x}_{v \cdot u} - \underbrace{\int \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x \, dx}_{v \cdot u'}$$

Vanskeligere enn $\int x e^x dx$!

Prøver (II):

$u(x) = x$, $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x$, $v(x) = e^x$

Lettere enn $\int x e^x dx$

$$\int \underset{u\,\cdot\,v'}{x e^x}\, dx = \underset{u\cdot v}{x \cdot e^x} - \int \underset{u'\cdot v}{1 \cdot e^x}\, dx$$

$$= \underline{\underline{x e^x - e^x + C}}$$