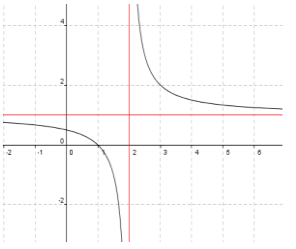
Repetisjon fra forelesning 7. mars

L'Hopitals metode (3.6 i Kalkulus)

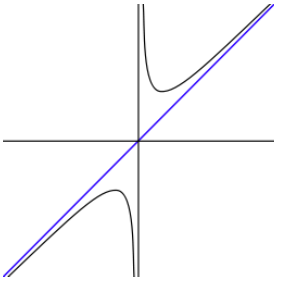
- Ofte får vi «$\frac{0}{0}$»- eller «$\frac{\infty}{\infty}$»-uttrykk i grenseverdier
- Da sier *l'Hopitals metode* at

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Asymptoter



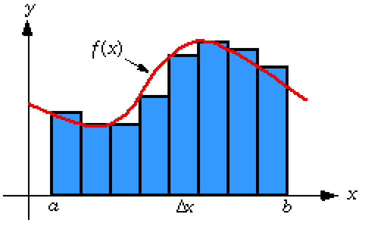
- Horisontale asymptoter i $y = b$ når
  - $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$
- Vertikale asymptoter i $x = a$ når
  - $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
- Skrå asymptote i $y = px + q$ når
  - $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = p$ og
  - $\lim_{x\to\infty} (f(x) - px) = q$



Det bestemte integralet

- Riemannsummen:

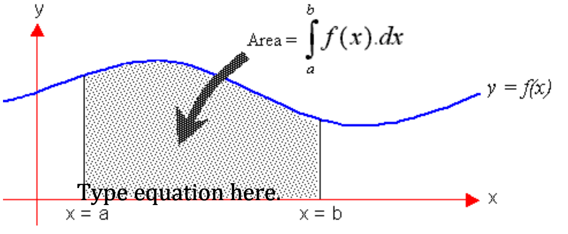
$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$



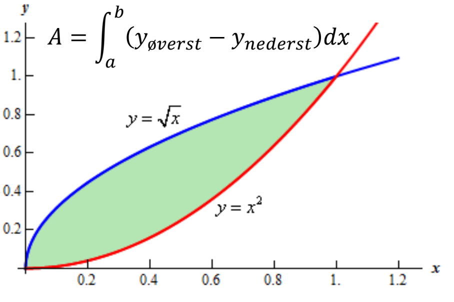
- Det bestemte integralet er grensen av Riemannsummen når Δx går mot 0 og antall stolper går mot ∞
- Når grensen eksisterer sies funksjonen å være *integrerbar*

Det bestemte integralet som areal

Areal mellom grafen og *x*-aksen



Areal mellom grafer



I dag

- Noen eksempler
- Analysens fundamentalteorem og antiderivasjon (5.3)
- Litt om uegentlige integraler (5.5)
- Numerisk integrasjon (5.4)

Eksempel, l'Hopitals metode

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$ ← "$\dfrac{1-\cos 0}{0} = \dfrac{0}{0}$"

Løser ved l'Hopitals metode:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = \underline{\underline{0}}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$ ← "$0 \cdot (-\infty)$"

$\dfrac{\ln x}{1/x}$ ← "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

Løser ved l'Hopitals metode:

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} \leftarrow \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot 1/x}{x^2 \cdot 1/x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{x}{1} = \underline{\underline{0}}$$

Eksempel, asymptoter

Bestem asymptotene til

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x + 5}$$

Horisontal asymptote: "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 1}{3x + 5} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 \cdot 2x}{3}$$

Grensen eksisterer ikke. Ingen horisontal asymptote.

Vertikal asymptote:

$$3x + 5 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $x = -\frac{5}{3}$ er en vertikal asymptote.

Skrå asymptoter:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x^2+1}{3x+5}}{x}$$

"$\frac{\infty}{\infty}$"

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{3x^2+5x}$$

"$\frac{\infty}{\infty}$"

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{\underbrace{3\cdot 2}_{6}x+5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{6} = \frac{\cancel{2}\cdot 2}{\cancel{2}\cdot 3} = \underline{\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - \frac{2}{3}x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\underbrace{\frac{2x^2+1}{3x+5} - \frac{2}{3}x}\right)$$

$$= \frac{2x^2+1-\frac{2}{3}x(3x+5)}{3x+5}$$

⋮

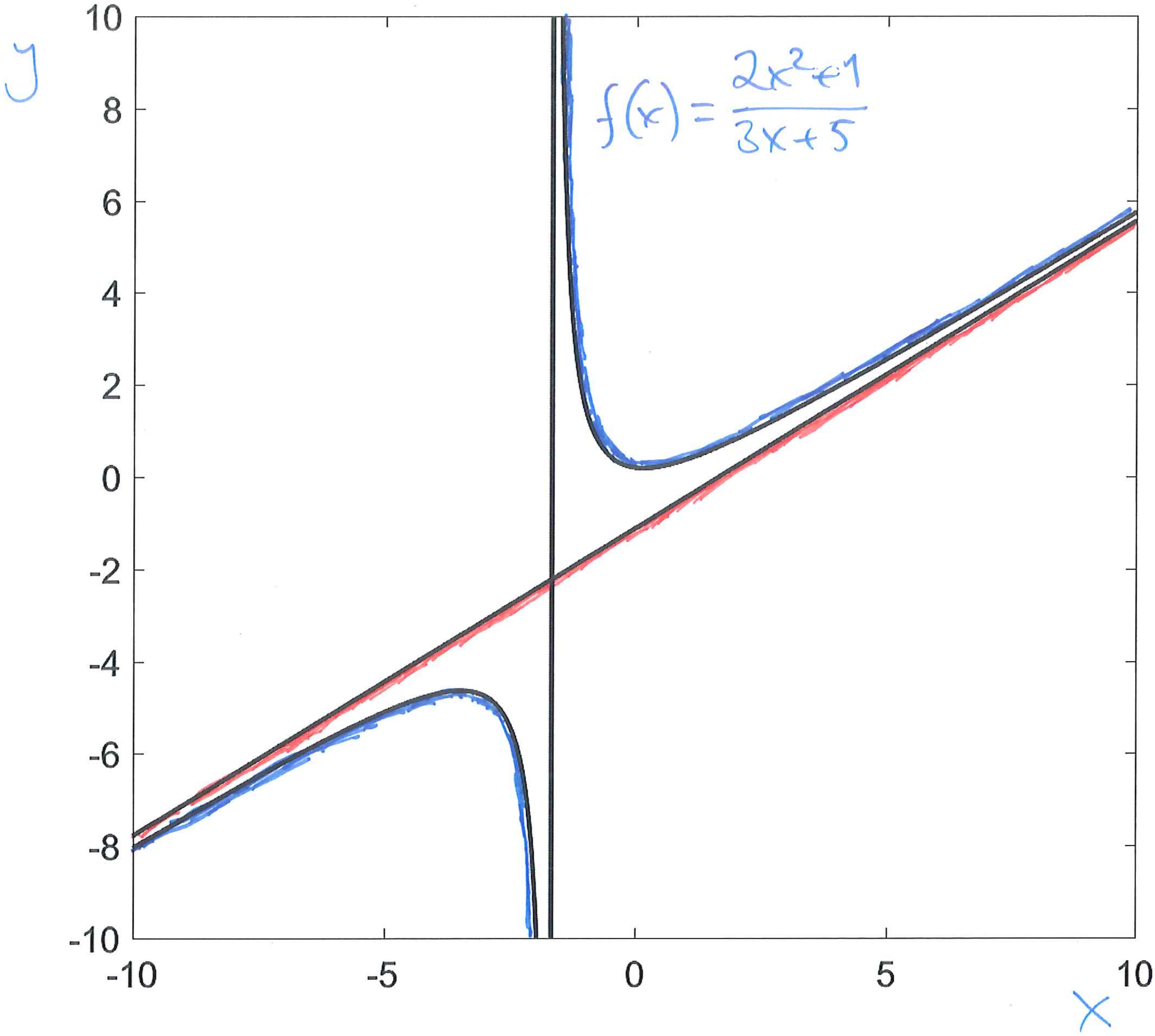
$$= \frac{1-\frac{10}{3}x}{3x+5}$$

"$\frac{+\infty}{\infty}$"

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{10}{3}x}{3x+5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-10/3}{3} = \underline{-\frac{10}{9}}$$

Skråasymptoten er

$$\underline{\underline{y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{9}}}$$



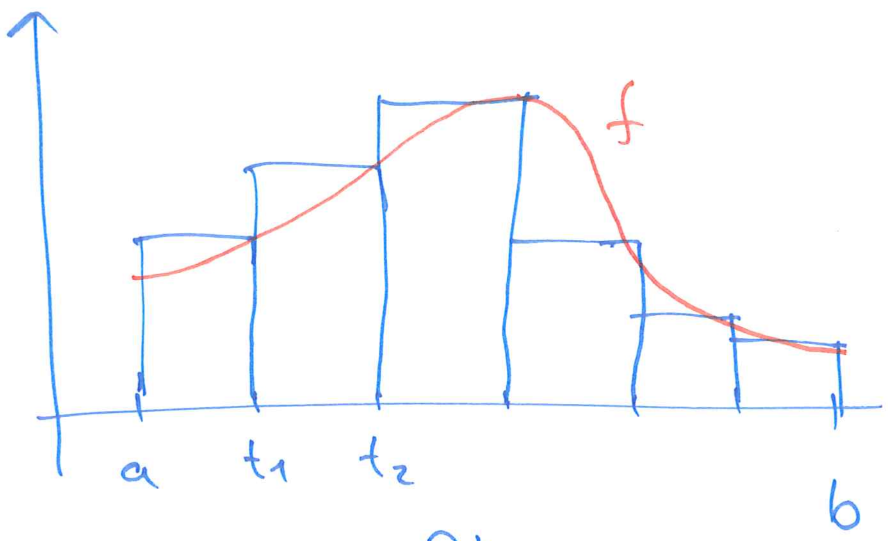
y
$f(x) = \frac{2x^2+1}{3x+5}$
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10
-5
0
5
10
x

Middelverdier

n målinger $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n)$

$$M = \frac{f(t_1)+f(t_2)+\dots+f(t_n)}{n} = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\frac{b-a}{n}$$



Minner om Riemann-summen.

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Middelverditeoremet (5.2.8)

f er kontinuerlig på $[a,b]$. Da fins $c \in (a,b)$ slik at $\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a)$.

Analysens fundamentalteorem (5.3)

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

Kan vi generelt bestemme en funksjon F slik at

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \; ?$$

Svaret er ja.

Analysens fundamentalteorem, del 1 (5.3.1)

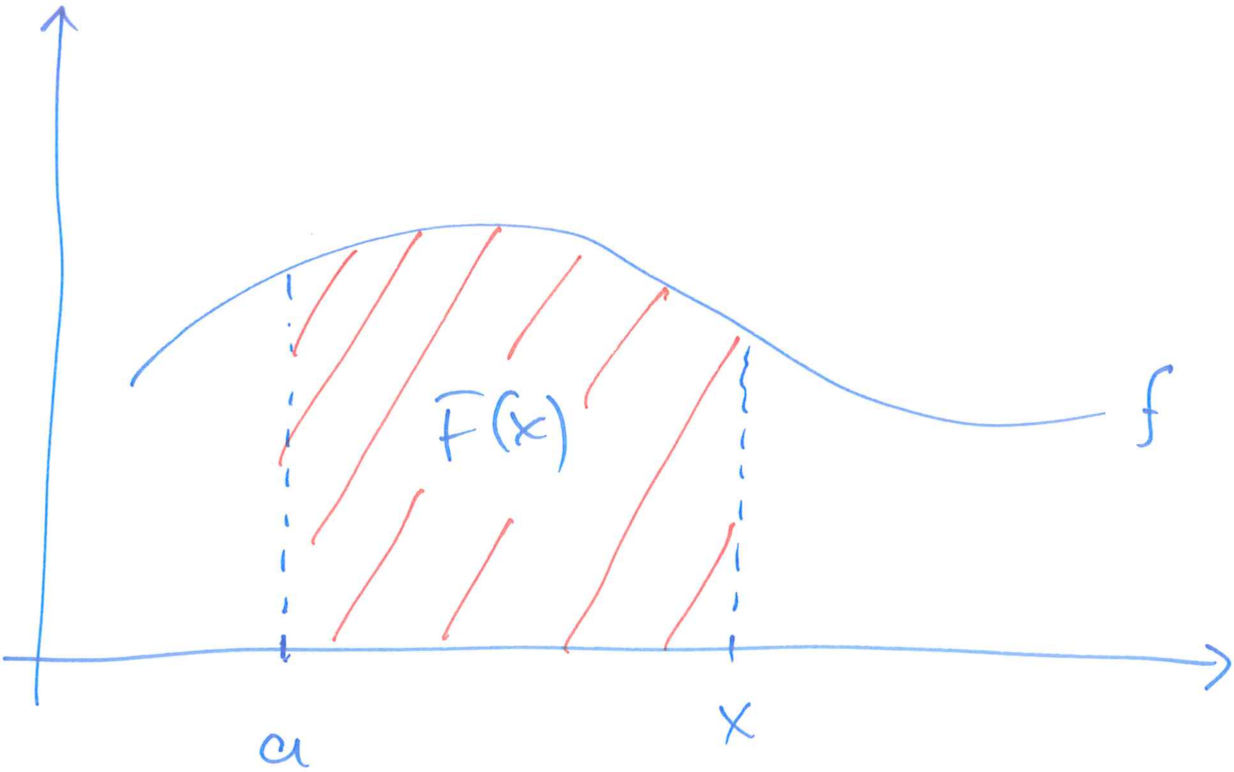
f er kontinuerlig på I, $a \in I$.

Da er

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in I,$$

kontinuerlig og deriverbar (i det indre av I) og

$$F'(x) = f(x), \; F(a) = 0.$$



Vi ser at $F(a) = 0$

Vil vise at $F'(x) = f(x)$:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

$x \leq c \leq x+\Delta x$

$f(c)\left(x+\Delta x - x\right)$
$= \Delta x \cdot f(c)$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\int_a^{x} f(t)\,dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x} f(t)\,dt}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c) \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = f(x).$$

$x \leq c \leq x+\Delta x$ og $\Delta x \to 0$.

Analysens fundamentalteorem, del 2

Hvis G er en antiderivert til f

"hvilken som helst"

$(G'(x) = f(x))$ så er

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(a) - G(b)$$

$F'(x) = f(x)$: F er antiderivert til f.

$$G(x) = F(x) + 2$$

$$\Rightarrow G'(x) = F'(x) + 0$$

$$\Rightarrow G'(x) = f(x)$$

Generelt:

konstant

$$G(x) = F(x) + C$$

$\Rightarrow G(x)$ er også antiderivert til f.

Oppgaver:

$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$

a) $\int_0^1 e^x \, dx = F(1) - F(0) = e^1 - e^0 = \underline{\underline{e-1}}$

$f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4$

b) $\int_1^2 x^3 \, dx = F(2) - F(1) = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{15}{4}}}$

$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x$

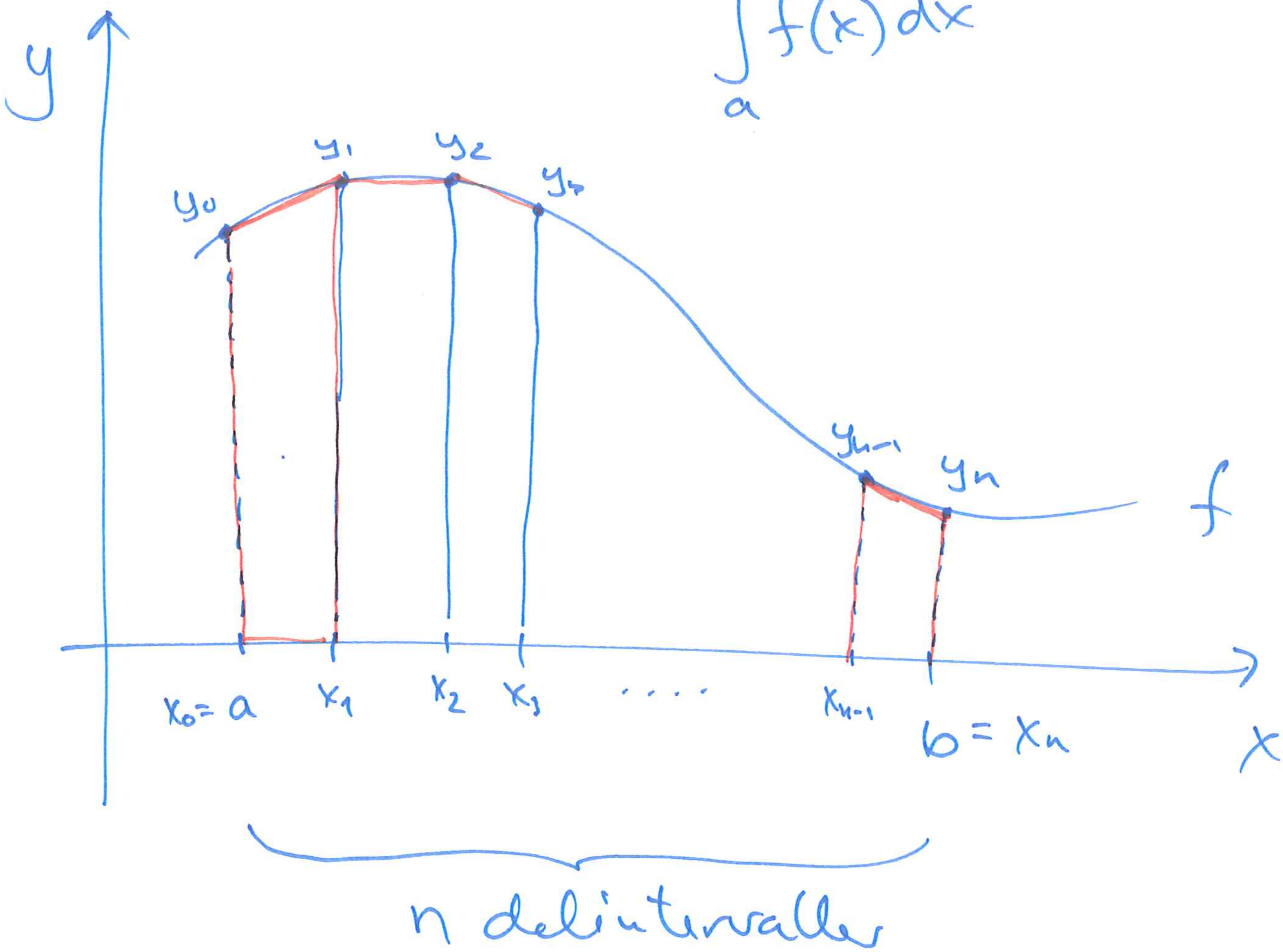
c) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = F(\pi) - F(0) = -\cos\pi + \cos 0$

$= \underline{\underline{2}}$

Numerisk integrasjon (5.4)

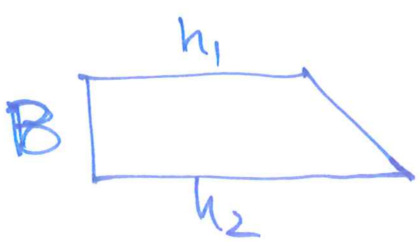
Trapesmetoden

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



med bredde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

$$A_{trapes} = B\,\frac{h_1 + h_2}{2}$$



Arealet ved bruk av trapesmetoden:

$$A = \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot \Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x + \cdots +$$

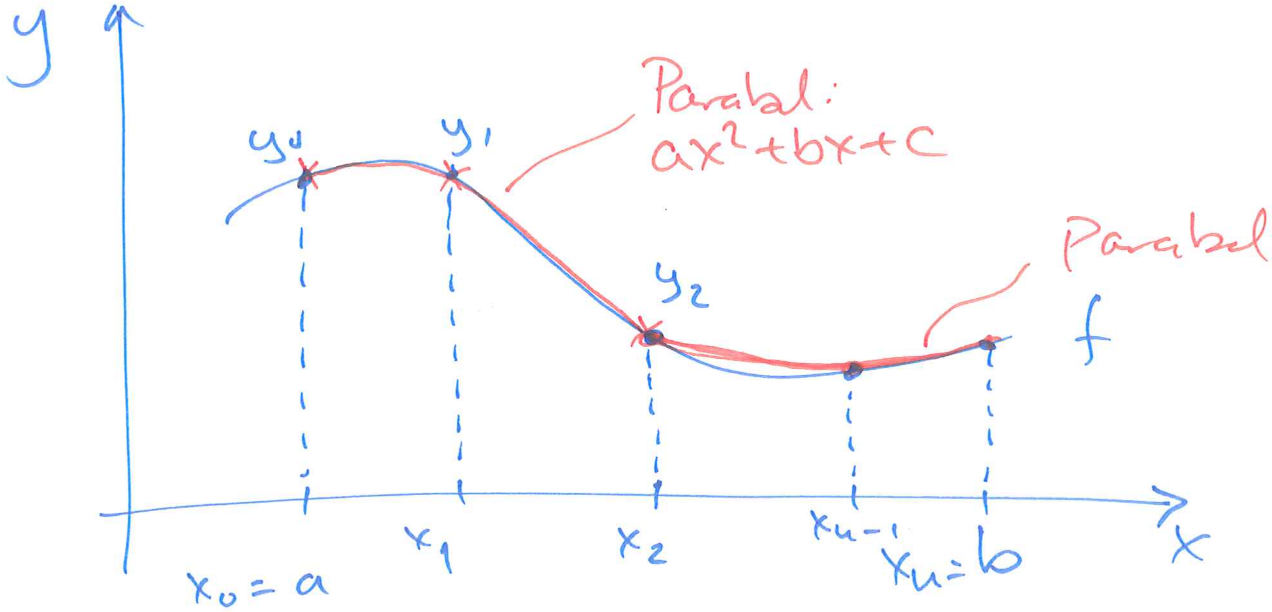
$$+ \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x$$

$$= \boxed{\frac{\Delta x}{2}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right]}$$

Trapesmetoden

$$\left(\Delta x = \frac{b-a}{n},\ y_k = f(x_k)\right)$$

Simpsons metode



Deler inn i $n = 2m$ delintervaller

$$\boxed{S_{2m} = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}\right)}$$

4 når odde

2 når jevn

Simpson's metode

Eksempel:

Vil beregne $\int_0^{\pi} \sin x \, dx \; (= 2)$.

Trapesmetoden:

$T_4 = 1{,}8961$

$T_8 = 1{,}9742$

$T_{16} = 1{,}9936$

$T_{32} = 1{,}9984$

Simpsons metode:

$S_4 = 2{,}0046$

$S_8 = 2{,}0003$

$\vdots$

Feilskranker:

Trapesmetoden: $|I - T_n| \leq K_2 \dfrac{(b-a)^3}{12 \cdot n^2}$

Simpsons metode: $|I - S_{2m}| \leq K_4 \dfrac{(b-a)^5}{180 \cdot n^4}$