Repetisjon fra forelesning 2. mars

Implisitt derivasjon (Kalkulus 2.4)

- Vi er vant til at funksjoner er *eksplisitt* gitt som $y = f(x)$
- Generelt er funksjoner *implisitt* gitt, f eks:
$$x^2y - y^2 - 2x = 0$$
- Slike uttrykk deriveres med hensyn på x ved å benytte vanlige derivasjonsregler (men husk at $y = y(x)$ er en funksjon av x!)
- Her:

$$\frac{d}{dx}(x^2y - y^2 - 2x) = \underbrace{x^2\frac{dy}{dx} + 2xy}_{\text{Produktregelen}} - \underbrace{2y\frac{dy}{dx}}_{\text{Kjerneregelen}} - 2 = 0$$

Koblede hastigheter (3.1)

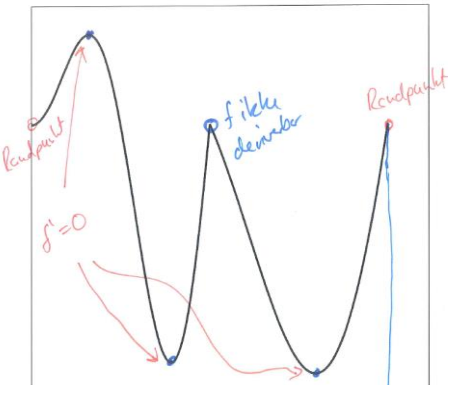
- To størrelser som er avhengige av hverandre varierer med tida t
- Endringsraten til den ene er kjent
- Typisk oppgave: bestem endringsraten til den andre størrelsen

Slik gjør vi

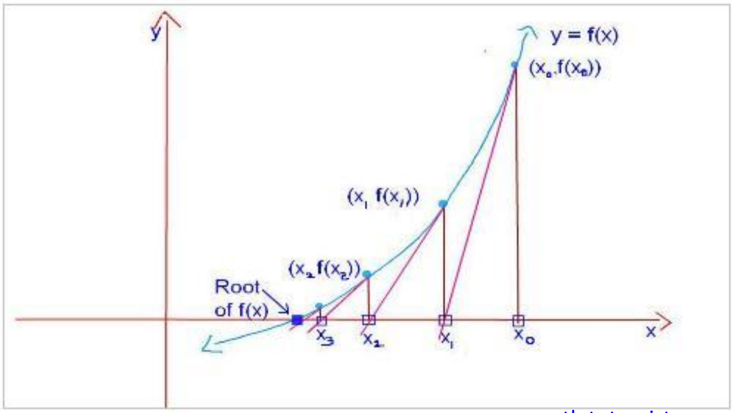
4. Beskriv koblingen mellom de to størrelsene ved en likning (likning (1) i eksempel 3.1.1). Det krever at vi har (valgt) bokstaver (navn) for de to størrelsene.
5. Deriver likningen med hensyn på t. Det gir en ny likning som beskriver koblingen mellom de to hastighetene (likning (2) i eksempel 3.1.1).
6. Sett inn verdier som gjelder ved det aktuelle tidspunktet, og løs den nye likningen med hensyn på den ukjente hastigheten.

Optimalisering (3.3)

- Bestemmelse av maks- og minpunkter (såkalte *ekstremalpunkter*) kalles optimalisering
- Ekstremalpunkter til en funksjon f er en av de følgende
  - Punkter hvor $f'(c) = 0$,
  - Randpunkter (punkter i hver ende av intervallet hvor f er definert)
  - Punkter hvor f' ikke eksisterer
- Lokale og globale maks- og minpunkter



Newtons metode (3.4)



math.tutorvista.com

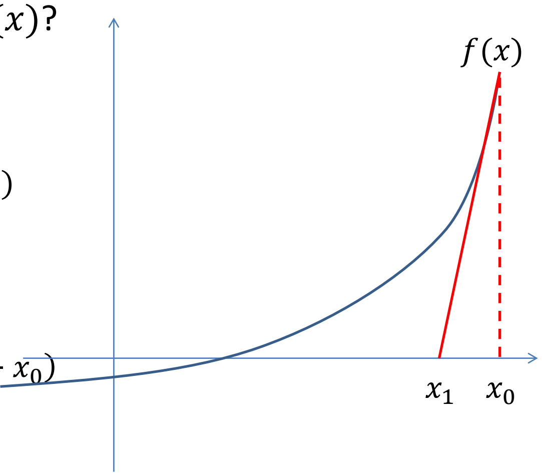
Tangentens nullpunkt

Hva er nullpunktet til $f(x)$?
Vi gjetter på $x = x_0$

Tangent:
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$y = 0, x = x_1$:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$
$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$



x_1 er nærmere nullpunktet enn x_0!

Iterative løsninger

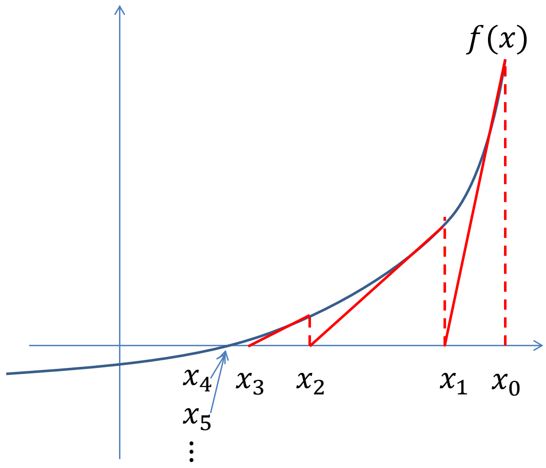
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

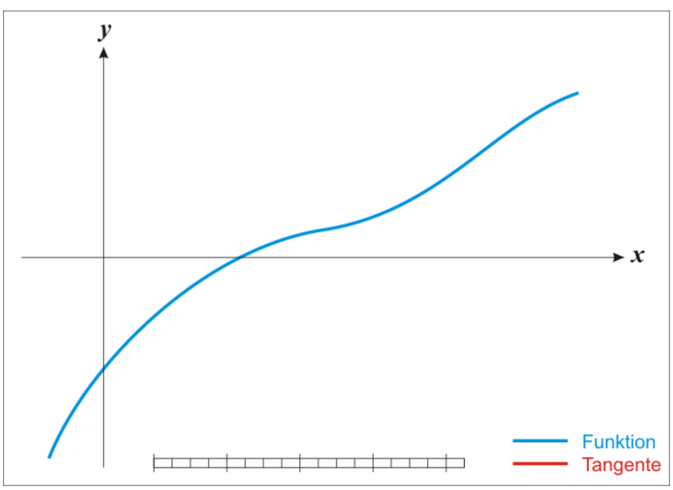
$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

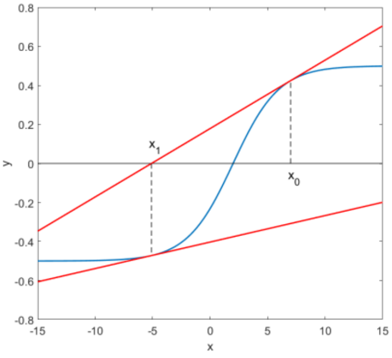


Metoden *konvergerer* mot nullpunktet til $f(x)$



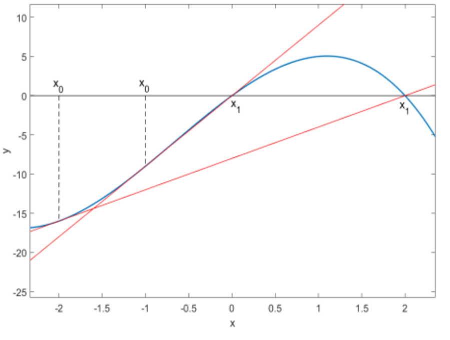
Fungerer Newtons metode alltid?

Nei!



Metoden *divergerer* for dårlige valg av x_0

Metoden kan konvergere til feil løsning ved dårlige valg av x_0



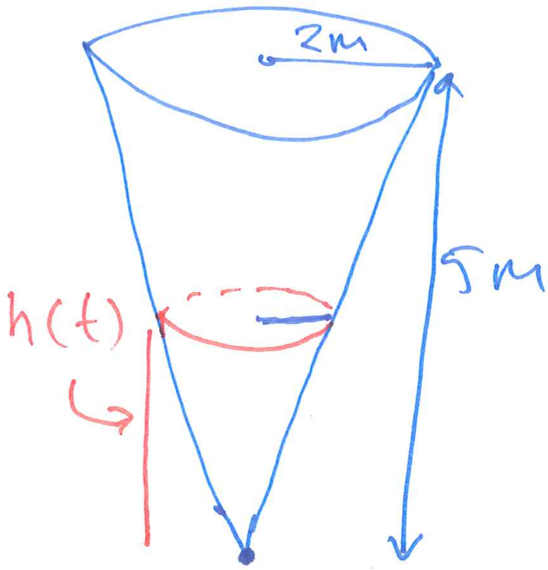
I dag

- Eksempler
- Rester fra kapittel 2 og 3:
  - L'Hopitals metode (3.6)
  - Asymptoter (2.2)
- Det bestemte integralet (5.1 i Kalkulus)
- Anvendelser (5.2)
- Analysens fundamentalteorem og antiderivasjon (5.3)

Koblede hastigheter – eksempel (3.1.2)

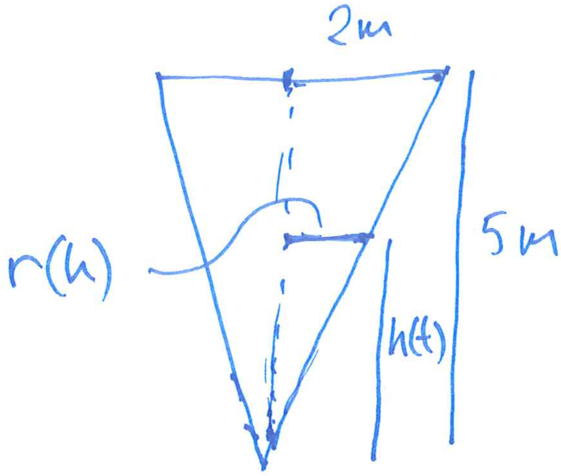
Vann pumpes inn med rate 0.1 m^3/min.

Hvor fort øker vannstanden når $h(t) = 3m$?



$$\frac{dV}{dt} = 0.1 \; m^3/min$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(h) h$$



$$\frac{r(h)}{h} = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow r(h) = \frac{2}{5}h$$

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}h\right)^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}\right)^2 h^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi \frac{2^2}{5^2} h^3$$

$$V = \frac{4\pi}{75} h^3$$

- - - - - - - -

Deriverer med hensyn på t:

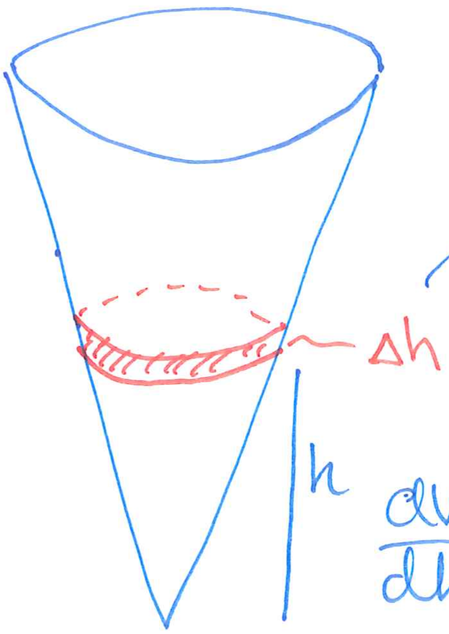
$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{75}\cdot 3h^2(t)\cdot\frac{dh}{dt}$$

$h = 3$ m, $\frac{dV}{dt} = 0.1\ m^3/min$, $\frac{dh}{dt} = ?$

$$0.1 = \frac{12\pi}{75}\cdot 9\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{0.1}{\frac{12\pi}{75}\cdot 9} = \frac{0{,}1\cdot 75}{9\cdot 12\cdot\pi} \approx \underline{\underline{0.022\ m/min}}$$

$$\frac{dV}{dh} = ?$$



$$\Delta V = \pi r^2(h)\,\Delta h$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta h} = \pi r^2(h) \qquad r(h) = \frac{2}{5}h$$

$$\frac{dV}{dh} = \lim_{\Delta h \to 0}\frac{\Delta V}{\Delta h} = \pi \underline{r^2(h)}$$

$$\frac{dV}{dh} = \pi\left(\frac{2}{5}h\right)^2$$

Kjerneregelen

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \pi \left(\frac{2}{5}h\right)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi \left(\frac{2}{5}h\right)^2 \underline{\frac{dh}{dt}}$$

0.1 m³/min　　3 m　　Skal bestemmes

Eksempel, Newtons metode

Vil løse $x^3 = 2 \iff \underbrace{x^3 - 2}_{f(x)} = 0$

$(x = \sqrt[3]{2})$.

$f'(x) = 3x^2$

Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2}$$

$$= \frac{x_n^3}{3x_n^2} - \frac{2}{3x_n^2} = \frac{1}{3}x_n - \frac{2}{3x_n^2}$$

$$= x_n - \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3x_n^2}$$

$$= \underline{\frac{2}{3}\left(x_n + \frac{1}{x_n^2}\right)}$$

Velger $x_0 = 2$:

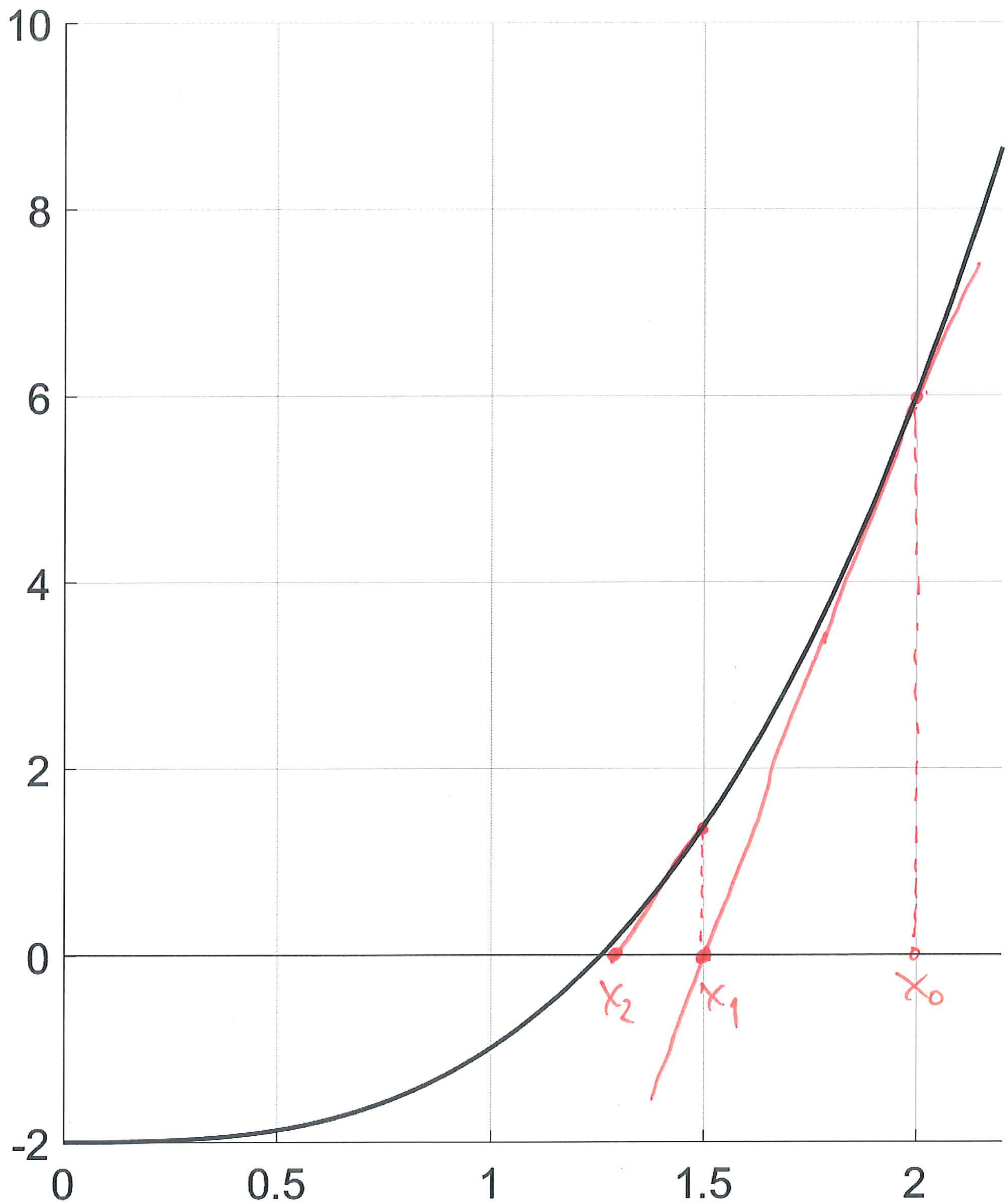
$$x_1 = \frac{2}{3}\left(x_0 + \frac{1}{x_0^2}\right) = \frac{2}{3}\left(2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \underline{\frac{3}{2}}.$$

$$x_2 = \frac{2}{3}\left(x_1 + \frac{1}{x_1^2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{(3/2)^2}\right) = \cdots = \frac{35}{27}$$

$$\approx \underline{1.2963}$$

$$\sqrt[3]{2} \approx \underline{1.2599}$$



10
8
6
4
2
0
-2
0
0.5
1
1.5
2
x_2
x_1
x_0

L'Hôpitals metode (3.6)

- Metode for å bestemme grenseverdier av typen

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

hvor $\frac{f(a)}{g(a)}$ er "$\frac{0}{0}$" eller "$\frac{\infty}{\infty}$".

- Metoden sier at

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Eksempel (banalt):

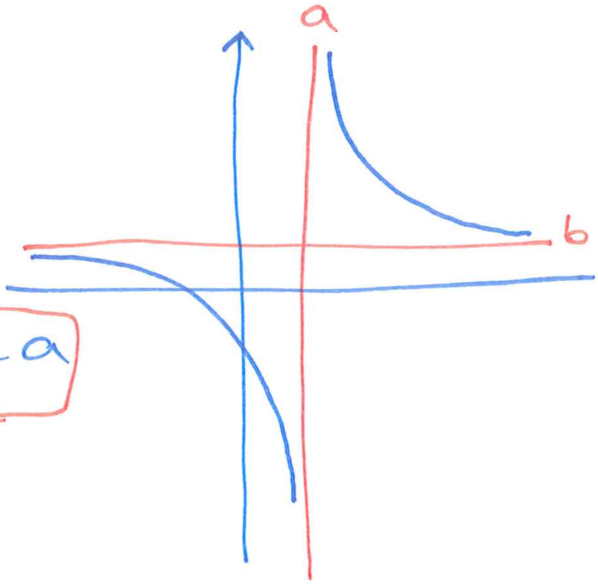
"$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{2x} = \underline{\underline{0}}$$

Asymptoter til en graf (2.2)

Når grafen til en funksjon f nærmer seg ei rett linje når $x \to a$ er den rette linja en $\boxed{\text{asymptote}}$ til grafen.

$\boxed{\text{Horisontal asymptote i } y=b}$



dersom $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

og/eller $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$

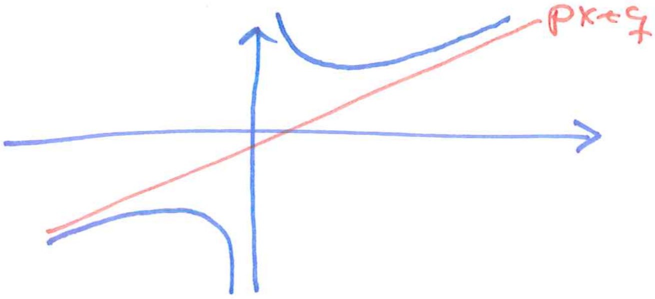
$\boxed{\text{Vertikal asymptote i } x=a}$

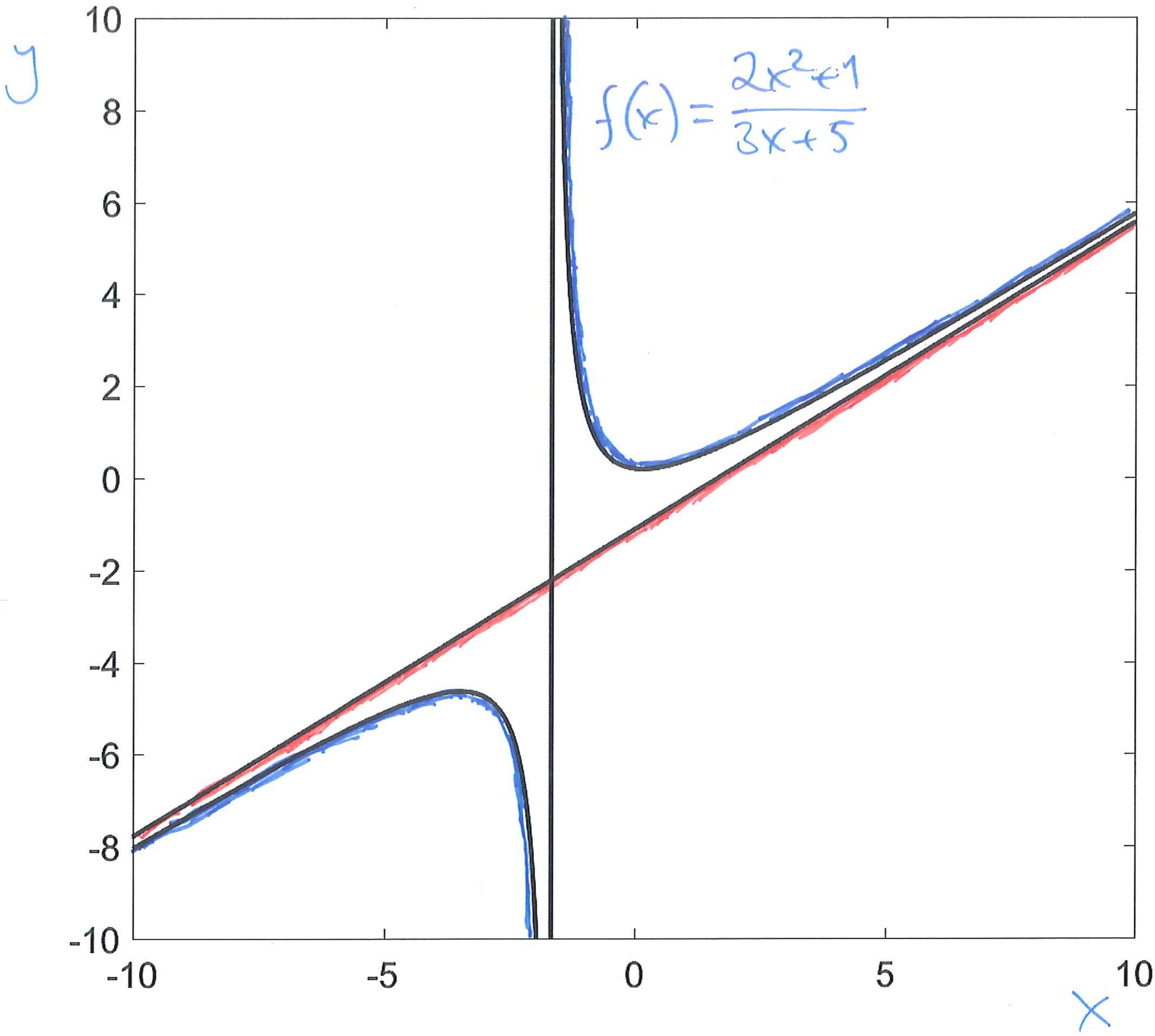
dersom $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$

$\boxed{\text{Skrå asymptote i } y=px+q}$

dersom $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = p$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x)-px\big) = q$





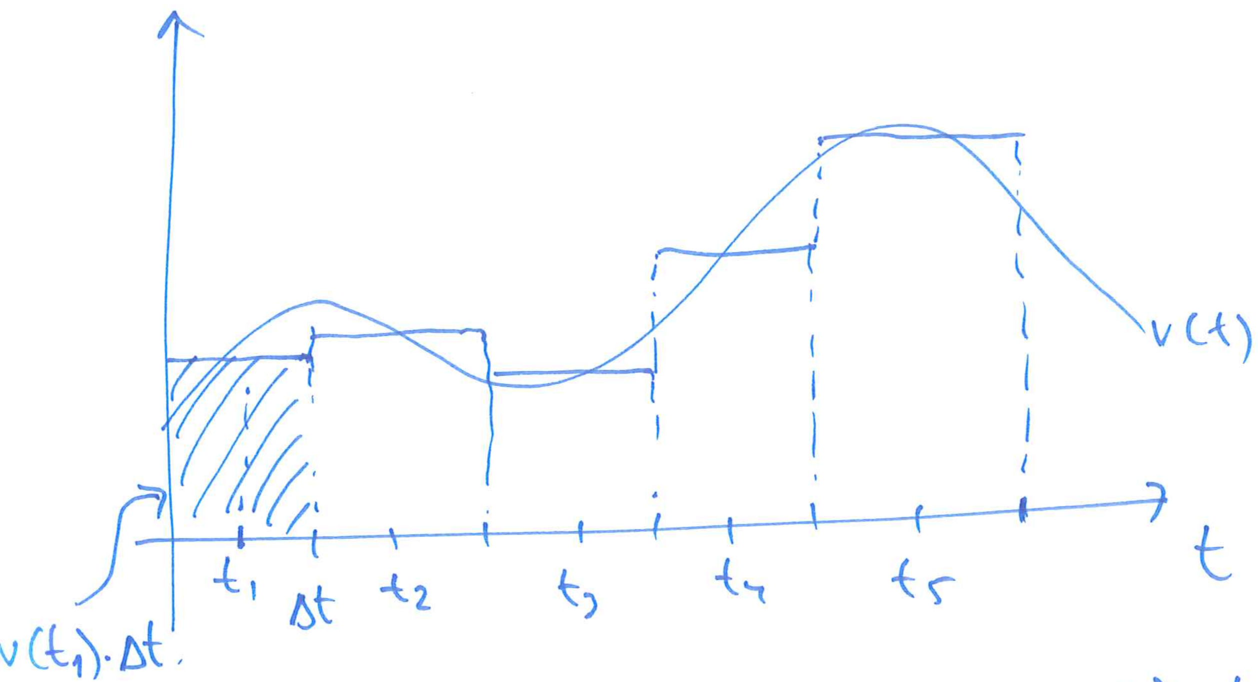
y
$f(x)=\frac{2x^2+1}{3x+5}$
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10
-5
0
5
10
x

Det bestemte integralet (5.1)

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$ Gjennomsnittsfarten

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

$v(t)$



$$S = \underbrace{v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + \dots + v(t_5)\Delta t}$$

Tilbakelagt strekning over et tidsrom

Riemann-sum

Vi kan bruke summe-notasjon:

$$S = \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\Delta t \xrightarrow[\Delta t \to 0]{n \to \infty} \boxed{\int_a^b v(t)\,dt}$$

Det bestemte integralet!

Generelt: Hvis grensen

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

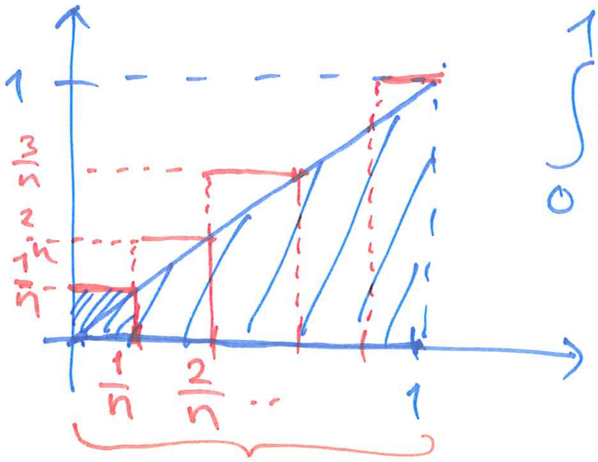
eksisterer, er denne grensen lik

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

og f sies å være $\boxed{\text{integrerbar.}}$

Eksempel

Bruk Riemann-summen til å bestemme $\int_0^1 x\,dx$.



n biter med bredde $\frac{1}{n}$

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1\cdot 1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}.$$

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{2}}.$$

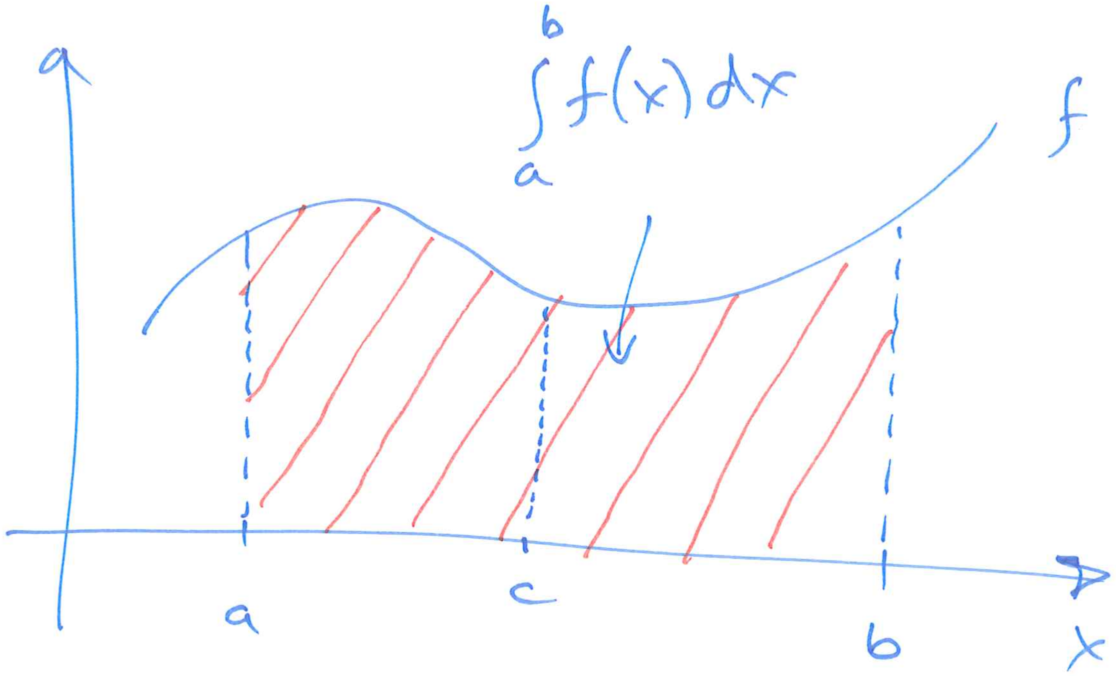
$$S_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\,\frac{3}{n} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}\,\frac{n}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2}\Big(\underbrace{1+2+3+\cdots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}\Big)$$

$$= \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{n}(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{(n+1)}{n} = \underline{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

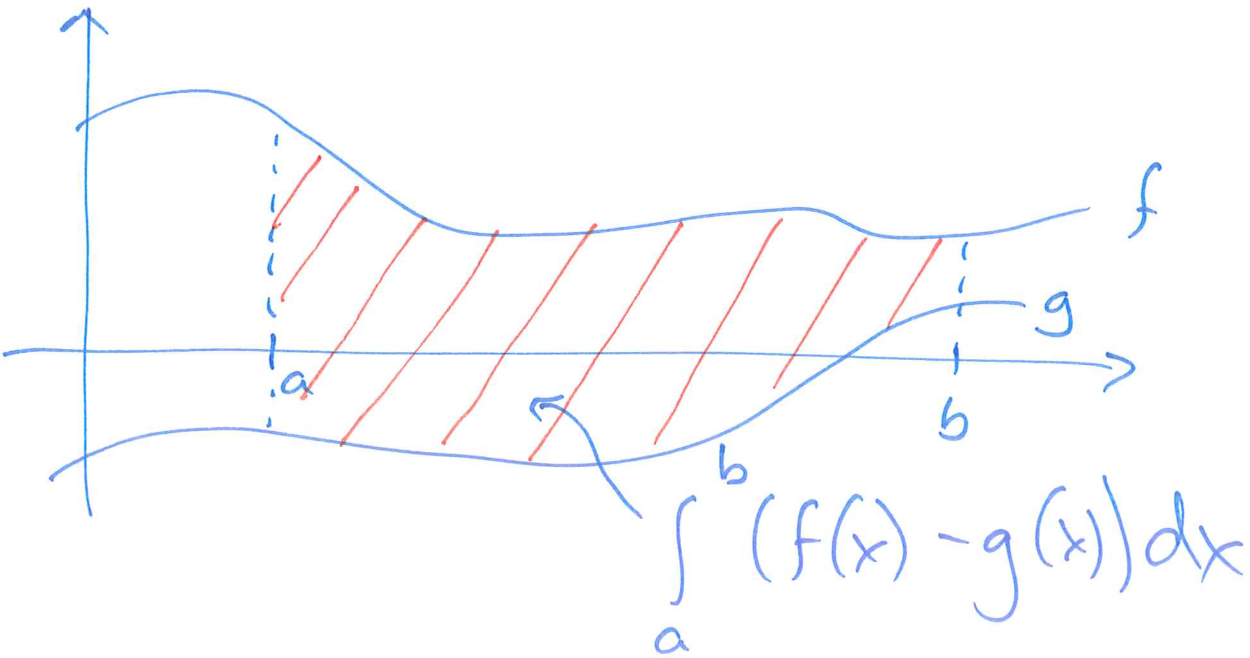
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}(1+0) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Det bestemte integralet som areal

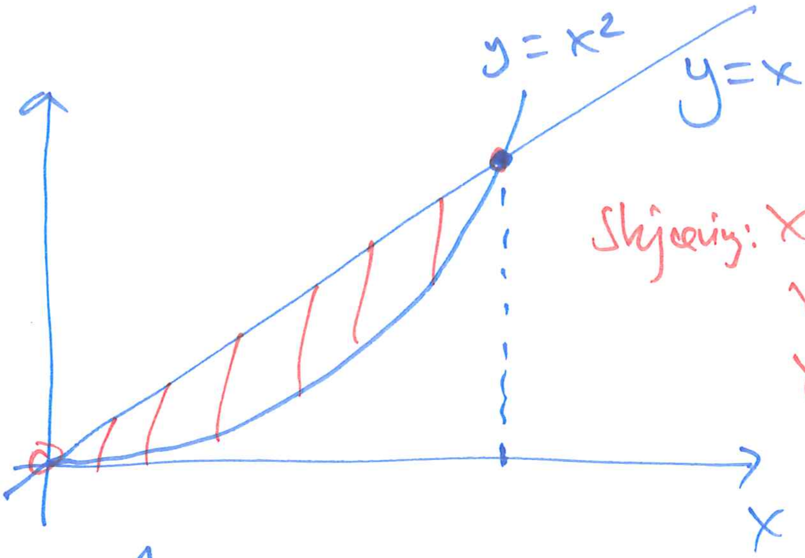


$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Arealet mellom to grafer



Eksempel (5.2.1)



Skjæring: $x^2 = x$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0, x = 1$

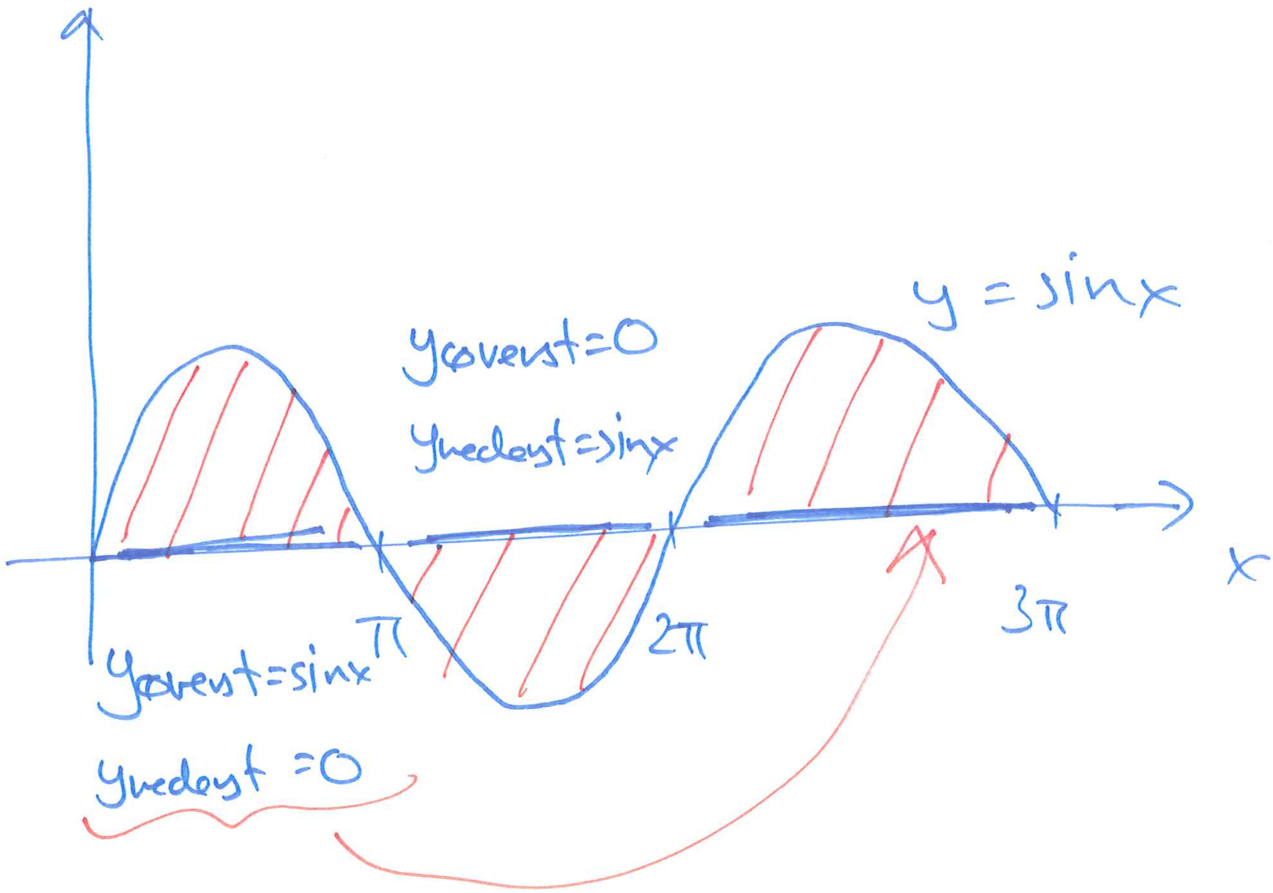
$a = 0$

$b = 1$

$$A = \int_0^1 (y_{\text{øverst}} - y_{\text{nederst}})\,dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

Eksempel (5.2.3)



$$A = \int_0^{\pi} (\sin x - 0)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (0 - \sin x)\,dx$$

$$+ \int_{2\pi}^{3\pi} (\sin x - 0)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x\,dx$$