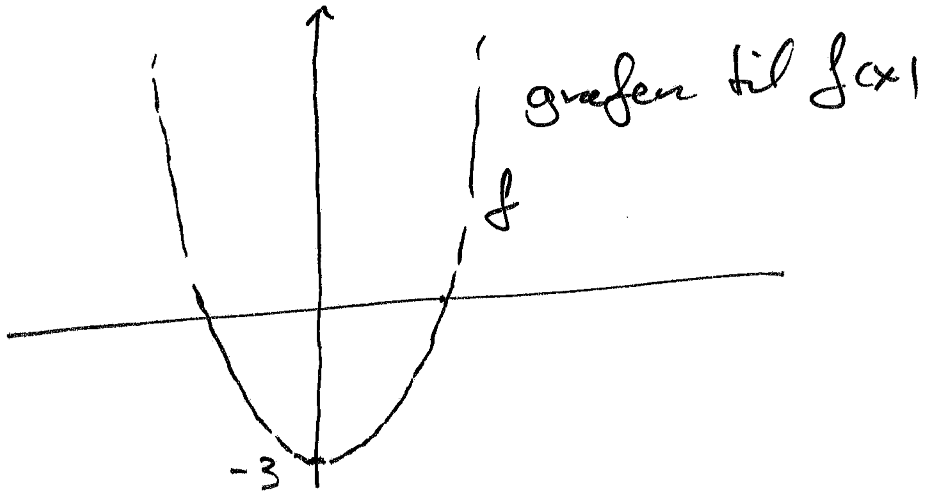
15. feb 2016

Reelle funksjoner

Eks. $f(x) = x^2 - 3$ ← funksjonsuttrykk

1 $f(2) = (2)^2 - 3 = 1.$ $f(0) = 0^2 - 3 = -3$



En Reell funksjon er en regel som til hvert element (tall) i definisjonsmengden tilordner et reelt tall

definisjonsmengden

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$$

Eks $\ln : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{1}{x}$ $g : \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - 3$ $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

(avgrenset def. mengde)

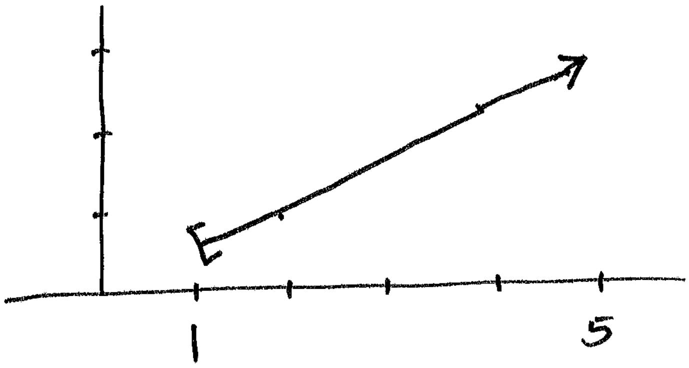
For et funksjons uttrykk bruker vi ofte den naturlige definisjonsmengden (største mulige def. mengde hvor uttrykket →

er definert (gir mening)).

Mengden av alle funksjonsverdier til en funksjon f kalles <u>verdimengden</u>, V_f.

(2) V_f til $\ln$ er $\mathbb{R}$.

Eks $f(x) = \frac{x}{2}$ $D_f = [1, 5\rangle$



$V_f = [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\rangle$

Endepunkt med 

Endepunkt ikkje med 

Finn nat. def. mengde til:

* $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

(alle reelle tall bortsett fra 2 og 3)

* $g(x) = \frac{1}{\ln|x|}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

$= \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$

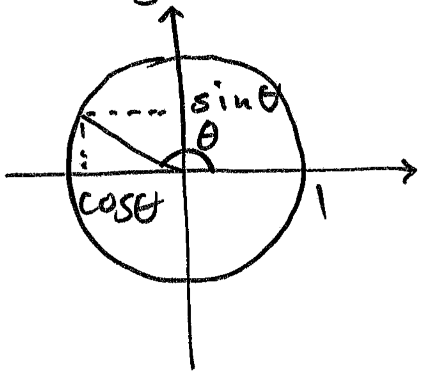
Funksjon gitt som en tabell:

x	0	1	2	3
$f(x)$	2,17	3.09	4.01	5,77

$D_f = \{0, 1, 2, 3\}$

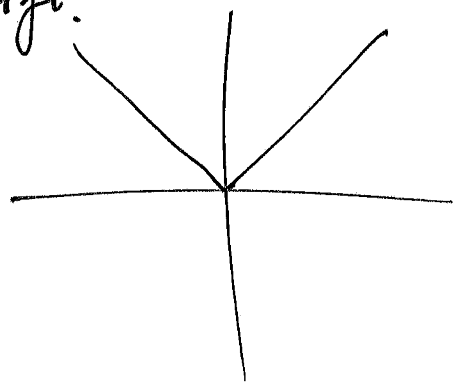
Funksjoner gitt geometrisk

3



Funksjoner gitt ved delt forskrift.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

f, g to funksjoner med def. mengde D

$f+g$, $f \cdot g$, $k \cdot f$ være funksjoner $k \in \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$

Vektorrom av funksjoner.

Kvotienten $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ er def. når $g(x) \neq 0$.

Sammensetning av funksjoner

4 $g \circ f$ "først f og så g"

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\quad \underline{V_f \subset D_g}$

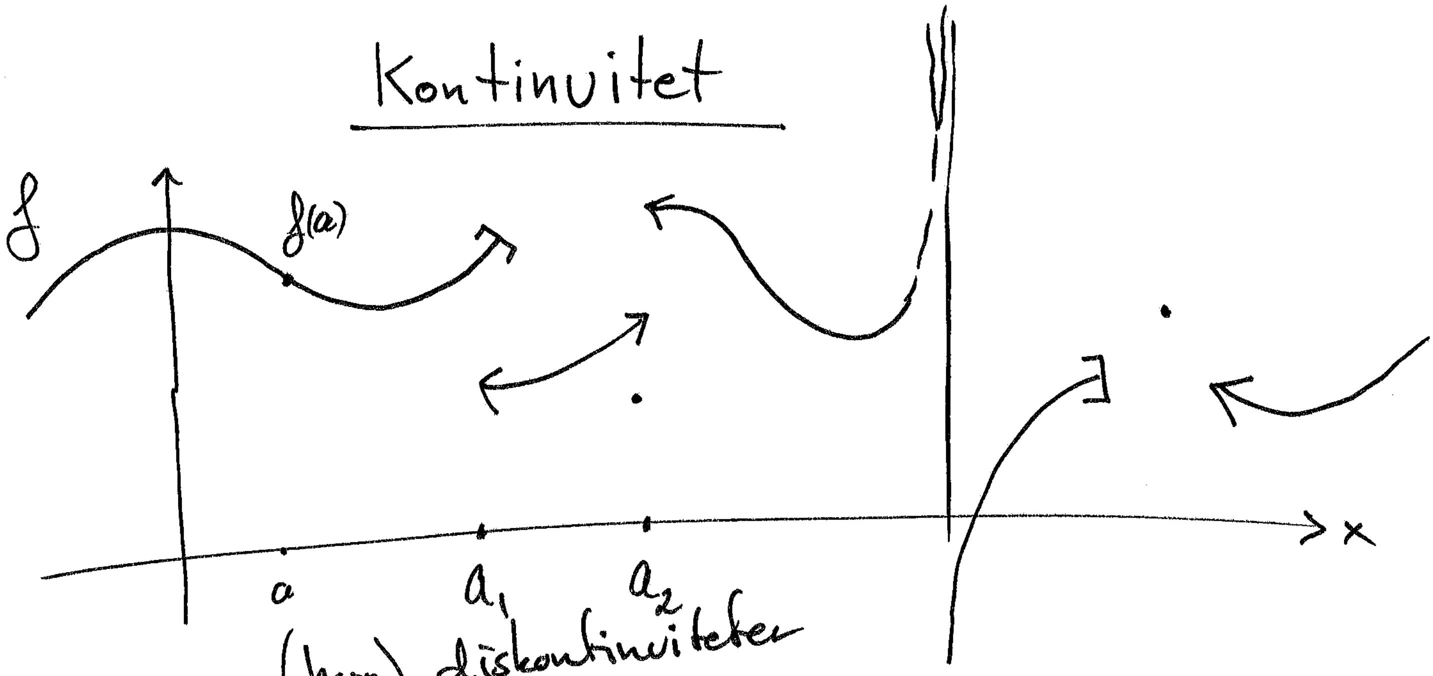
$f(x) = x^2 - 3$ $\quad g(x) = \sin(x)$

$g \circ f(x) = \sin(x^2-3)$

$f \circ g(x) = (\sin(x))^2 - 3 = \underline{\sin^2(x)} - 3$

Kontinuitet

5



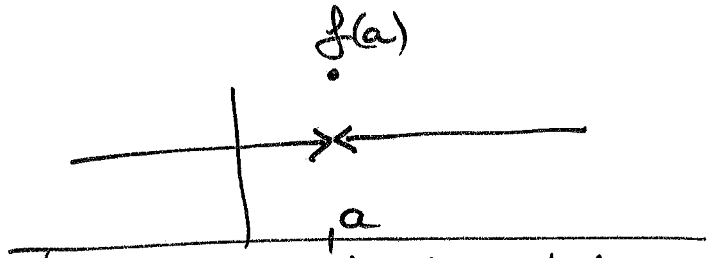
(hopp) diskontinuiteter

En funksjon $f(x)$ er <u>kontinuerlig</u> i $x = a$ $(a \in D_f)$ hvis $f(x)$ nærmer seg $f(a)$ når x nærmer seg a.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

"grensen når x går mot a er f(a)"

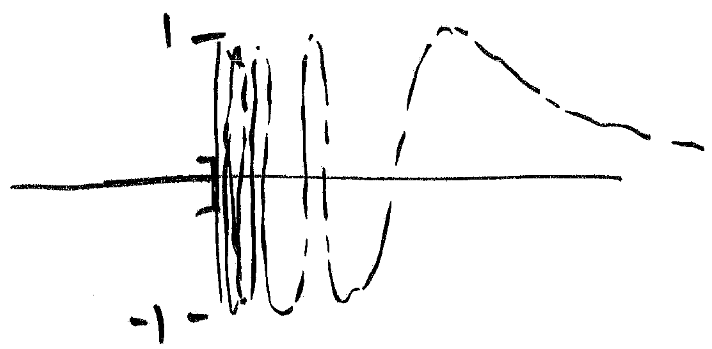
Eks



(hevbar) diskontinuitet

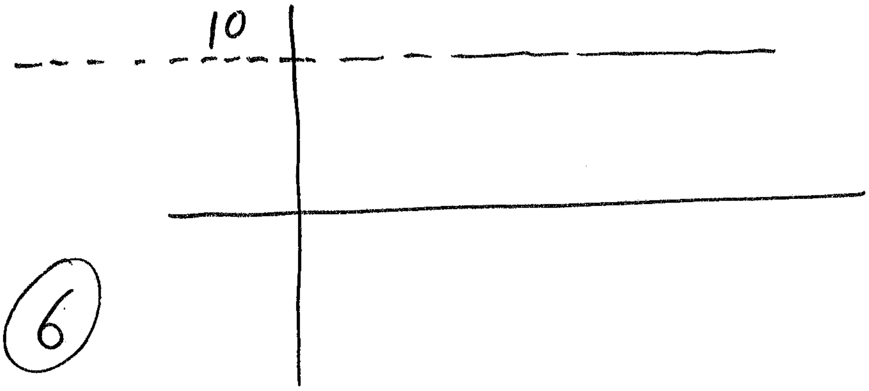
Eks

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



Essensiell diskontinuitet.

Eks $$f(x) = \begin{cases} 10 & x < 0 \\ 10 + \frac{1}{10^6} & x \geq 0 \end{cases}$$



(ser kont. ut, men er diskont. i $x=0$)

6

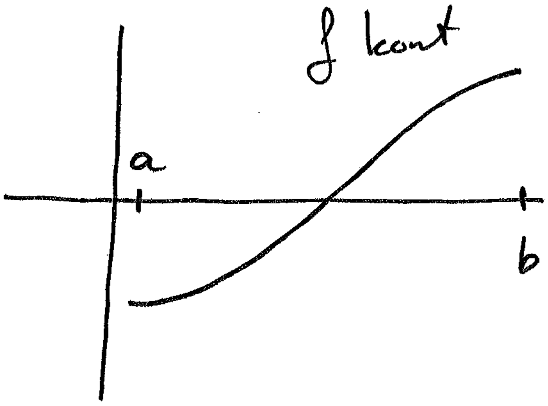
De elementære funksjonene er kontinuerlige.
polynomer, sin cos. ln exp etc.

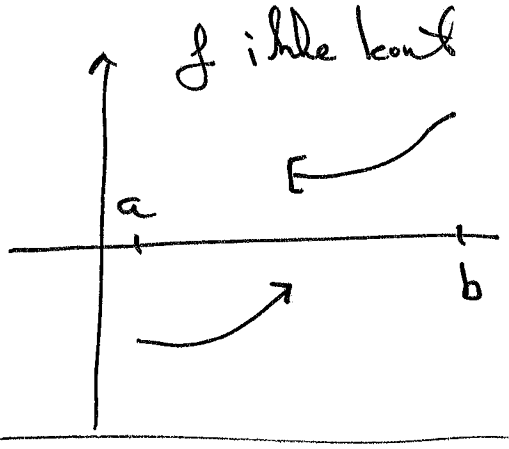
$f(x)$, $g(x)$ kont. i $x=a$ $\Rightarrow$
$f+g$, $f \cdot g$, $k \cdot f$ $(k \in \mathbb{R})$ er kont i a.
$g(a) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ kont. i a.

$g \circ f$ er kont i $x=a$ hvis
$f(x)$ er kont. i $x=a$ og g er kont i $f(a)$.

$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = |x|$
$g \circ f$ er kont. for alle x.
$g \circ f(x) = |\sin(x)|$ (siden f og g er kont.)

Skjæringssetningen

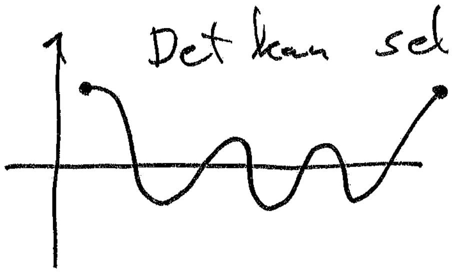




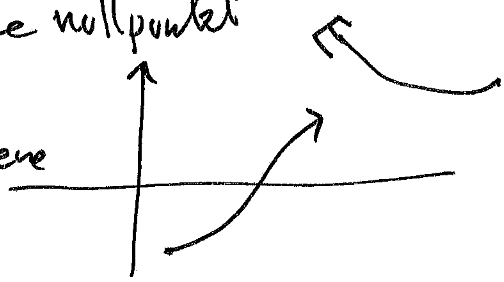
7

Skjæringssetningen

Anta $f(x)$ er en **Kontinuerlig** funksjon på $[a, b]$ slik at $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn, da **finnes det** minst et nullpunkt på (a, b). Dvs. $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = 0$



Det kan selvsagt være nullpunkt selv om betingelsene ikkje er oppfylt.



$f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn $\Leftrightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$

Det finnes n-røtter av alle tall $a \geq 0$.

$$f(x) = x^n - a$$

(hvorfor $a+1$?)

$a = 0$ ok. ellers

$f(0) = -a < 0$ $\qquad f(a+1) = (a+1)^n - a > 0$

$f(x)$ er kont. Det finnes en løsning til $f(x) = 0$

mellom 0 og $a+1$ (fra skjæringssetning)

$f(x)$ er økende for $x \geq 0$ $\left(f'(x) = nx^{n-1} - 0 = nx^{n-1} \geq 0 \right)$

$f(x)$ kan derfor ikkje ha mer enn én rot i $[0, a+1]$.

Det finnes en entydig løsning til $f(x) = 0$, $x \geq 0$

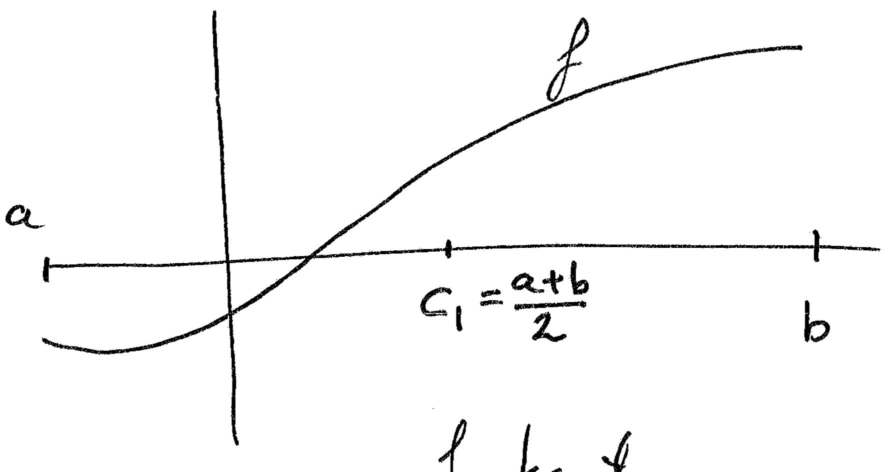
8

$x^n = a$

Det er $\sqrt[n]{a}$

Halveingsmetoden.

Algoritmisk metode for å estimere nullpunkt til kontinuerlige funksjoner.



f kont.

$f(a) \cdot f(b) < 0$

$f(a) \cdot f(c) < 0$ la $b = c_1$

ellers $a = c_1$

Gjenta prosedyren

Mer på onsdag

...

Referanser til Lorenzen boken

1.4 Funksjoner

1.5 Elementære funksjoner
1.6 Trigonometriske funksjoner

2.5 Kontinuerlige funksjoner
2.6 Flere anvendelser av kontinuitet

9

Hint til obl 3

oppg 1 : Eksamensoppgave 1(c) mai 2015
oppg 2 : ——— 2 des. 2015
oppg 3 : ——— 4 des 2015