25 jan 2016

Inversmatriser

Liten test i slutten av første time.

Matrise multiplikasjon

(1) $$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots \; a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$m \times n$ matrise $\quad n \times 1 \quad$ $m \times 1$ matrise

En $m \times k$-matrise A og en $l \times n$-matrise B har et produkt $A \cdot B$ bare hvis $k = l$. Da er produktet en $m \times n$-matrise.

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}} \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}} \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 3(-1)+4(2), & 4(3)+5\cdot 4, & -4 \\ 1(-1) & , 1\cdot 4 & , 0 \\ 0(-1)+7(2), & 7\cdot 5 & , -7 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 32 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 14 & 35 & -7 \end{bmatrix}$$

En matrise er <u>kvadratisk</u> hvis antall rader og kolonner er likt. : $n \times n$-matrise

<u>Diagonalmatriser</u> er kvadratiske matriser hvor alle elementer som er ulik 0 må ligge på diagonalen.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ diagonal matrise. $[0]$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ er også diagonale matriser.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 & 0 \\ 0 & -3\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -21 \end{bmatrix}$$

Matrise multiplikasjon av diagonale matriser (av samme dimensjon) er gitt ved elementvis multiplikasjon.

<u>øvre triangulær</u> matrise $[a_{ij}]$ $a_{ij} = 0$ for $i > j$

alle elementer ulik 0 på diagonalen, eller over diagonalen

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ øvre triangulær matrise

Tilsvarende : nedre triangulær matriser.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ekte) øvre triangulær matrise

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nedre triangulær.

3

$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right.$ ikke kvadratisk $\left. \right)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nullmatrisen
av dim 2×2.

<u>Identitetsmatrisen</u> $\mathbb{1}_n$ (I_n)

$$\mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$n \times n$ matrise

diagonal-elementene er 1
all andre element er 0.

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \mathbb{1}_n = A \qquad \mathbb{1}_m \cdot A = A$$

A kvadratisk, n heltall ≥ 1

$$A^n = \overbrace{A \cdots A}^{n}$$

Potenser

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

Test M 1000 25 jan 2016

* La $A = [1, 2]$ og $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Regn ut $A \cdot B$ og $B \cdot A$

$$\underset{1\times 2}{A \cdot B = [1, 2]} \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = [1(-1) + 2(1)] = \underset{1\times 1}{[1]}$$

$$B \cdot A = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \underset{1\times 2}{[1, 2]} = \underset{2\times 2\text{-matrise}}{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

* Overfør matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 40 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

til redusert trappeform.

Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 4y + 4z &= 40 \\ 2x + 3y + 5z &= -2 . \end{aligned}$$

Løsning $\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 40 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 1/4 \\ \end{matrix} \; (-2)$$

trappeform

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -16 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

redusert trappeform

$$x + z = -16$$
$$y + z = 10$$

z frivariabel.

$$y = 10 - z$$
$$x = -16 - z$$

Løsningene til likningssystemet

(parametriserer en linje)

A $n \times n$ matrise

B er en <u>inversmatrise</u> til A hvis

$$\underline{AB = 1_n \qquad BA = 1_n} \quad \left(\begin{matrix}B \text{ skrives} \\ A^{-1}\end{matrix}\right)$$

* $A\vec{x} = \vec{b}$ Hvis A har inversmatrise

og vi kjenner $A\vec{x}$, da kan vi finne $\vec{x}$.

$$A\vec{x} = \vec{b}$$ ganger med A^{-1} fra

venstre:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{1_n} \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\underline{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}}.$$

(diagonalisering)

* Anta $M = ADA^{-1}$ D diagonmatrise

$$M^n = AD\underbrace{A^{-1}(A}_{1_n}D\underbrace{A^{-1})\cdots}_{1_n} (ADA^{-1})$$

$$= A \cdot D^n A^{-1}$$

Egenskaper: $\underline{(A^{-1})^{-1} = A}$

7

$$\underline{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$$

$$A \cdot B\,(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A\,(\underbrace{B \cdot B^{-1}}_{1}) \cdot A^{-1}$$

$$= A \cdot A^{-1} = 1_n$$

$$1_n^{-1} = 1_n$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix}$$ når $a \cdot b \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot c & 0 \\ 0 & b \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ikkje alle (kvadratisk) matriser har inversmatrise

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = 0$, så $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ har ingen inversmatrise.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ så $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ har ingen inversmatrise

Inverser til 2×2-matriser

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}} \qquad ad-bc \neq 0$$

Forklaring:

8 $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[a, b] \cdot \vec{V}_1 = 1$

$[c, d] \cdot \vec{V}_1 = 0$ $\qquad \vec{V}_1$ vinkelrett på $[c, d]$

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}$$

Lengden må være slik at

$[a, b] \cdot \vec{V}_1 = 1$:

$$[a, b]\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} = a \cdot d - bc$$

så hvis $ad-bc \neq 0$ så må

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}.$$

Tilsvarende $\vec{V}_2 = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}.$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{27-(-28)} \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{55} \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}$$

Hva er løsningine til

9

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= a \\ -4x + 9y &= b \end{aligned} \quad ?$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{1_2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{55} \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{55}(9a - 7b)$$

$$y = \frac{1}{55}(4a + 3b)$$

\# Metode for å finne inversmatrise

$$\underset{\substack{n \times 2n \\ \text{matris}}}{[A \mid 1_n]} \overset{\text{radoperasjoner}}{\sim} [\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ikke mulig}}}{1_n} \mid A^{-1}] \quad (\text{hvis mulig})$$

: A^{-1} eksisterer ikke.