Innlevering	ELFE KJFE MAFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 2
Innleveringsfrist	Torsdag 06. oktober 2016 kl 16:00
Antall oppgaver:	6

Løsningsforslag

1

Vi definerer noen matriser

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Regn ut følgende for hand (når uttrykkene eksisterer). Sjekk gjerne svarene ved å benytte matlab.

$$A + B,\ AB,\ BA,\ AB - BA,\ B^2,\ B^3$$

$$C + D,\ CD,\ DC,\ AC,\ CB$$

$$A^T,\ B^T,\ C^T,\ D^T$$

Sjekk at

$$B^T A^T = (AB)^T$$

Forklare hvorfor dette er sant ikke bare for A og B ovenfor, men for alle matriser A og B slik at AB er definert.

LF:

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} -6 & 15 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} \quad B^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 13 & -27 \end{bmatrix}$$

Vi har at $C + D$, DC og CB ikkje eksisterer.

$$CD = \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix} \quad AC = \begin{bmatrix} -20 & 5 & -6 \\ 0 & -10 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Vi skal nå forklare hvorfor

$$B^T A^T = (AB)^T$$

La A bestå av m rade k-vektorer

$$A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$$

og la B beså av m søyle k-vektorer

$$B = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_m \end{bmatrix}$$

Da er element i, j i produktet AB skalarproduktet $r_i s_j$.
De transponerte matrisene er

$$A^T = \begin{bmatrix} r_1^T & r_2^T & \cdots & r_n^T \end{bmatrix}$$

og

$$B^T = \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{bmatrix}$$

Element i, j i produktet $B^T A^T$ er $s_i^T r_j^T = r_j s_i$. Dette viser påstanden.

2

For hver av matrisene nedenfor finn den ekvivalente matrisen som er på redusert trappeform. Dere kan sjekke svaret dere kommer frem til ved å benytte kommandoen $rref$ i matlab.

Vis utregningene deres.

a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & (1-i) \\ 2i & -i \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 \\ 6 & 17 & 0 \\ 5 & -15 & 25 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 & 19 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

LF: Utregningene for oppgave 2 og 3 er gjort for hånd. De ligger i egne pdf-filer. Nummereringen av oppgavene avviker litt fra det som vi benyttet på oppgavene her. Det ligger også ved LF til oppgaver vi ikke har hatt i dette obligsettet (men som har vært gitt tidligere).

3

Beskriv alle løsningene til likningssystemene nedenfor.

a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

for parametre a og b. (Uttrykk x og y som funksjoner av a og b.)

b) Her er et eksempel med komplekse tall ($i^2 = -1$)

$$\begin{bmatrix} 1 & (1-i) \\ 2i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 \\ 6 & 17 & 0 \\ 5 & -15 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{bmatrix}$$

for alle mulige verdier av parameteren a.

d)

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 & 19 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4

Vi har likningssystemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Hvor A er lik $[\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3]$. Vi anvender Matlab kommandoen rref på totalmatrisen til likninssystemet og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.012 \\ 0 & 1 & 0 & -2.472 \\ 0 & 0 & 1 & 0.123 \end{bmatrix}$$

Uttrykk $\overrightarrow{b}$ som en lineær kombinasjon av søylevektorene til matrisen A.

LF: Matlab kommandoen rref utfører radoperasjoner til matrisen overføres til redusert trappeform (reduced row echelon form). Løsningen til det opprinnelige likningsystemet er lik løsningene til likningsystemet vi får etter at matlab har utført radoperasjoner slik at totalmatrisen er på redusert trappeform. I det siste tilfellet er det bare å lese av løsningene. Siden

$$A\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{v}_1 + x_2\overrightarrow{v}_2 + x_3\overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{b}$$

så har vi at

$$\underline{1.012\overrightarrow{v}_1 - 2.472\overrightarrow{v}_2 + 0.123\overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{b}}$$

5

Bestem alle polynomer $q(x)$ av grad 4 eller lavere slik at

$$q(-2) = 3 \quad q(-1) = 1 \quad q(1) = 2 \quad q(2) = 11.$$

Regn dette ut for hand.

LF: La

$$q(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

være et polynom av grad 4 eller mindre. Setter vi inn for $x = -2, -1, 1, 2$ og krever at funksjonsverdiene skal være som ovenfor får vi fire lineære likninger i de fem koeffisientene. Her er totalmatrisen til likningssystemet.

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 16 & -8 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right]$$

Vi trekker rad 2 fra rad 2 og rad 1 fra rad 4. Deretter ganges rad 3 og 4 med en halv

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 16 & -8 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Vi trekker 16 ganget rad 2 fra rad 1

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 8 & -12 & 14 & -15 & -13 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi legger nå til henholdsvis $-1, 1$ og -14 kopier av rad 4 til rad 3,2 og 1

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 8 & -12 & 0 & -15 & -13 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nå legges 1 kopi av rad 3 til rad 2 og -8 kopier av rad 3 til rad 1.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -12 & 0 & -15 & -17 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rad 1 ganges med $-1/12$ Deretter trekkes den fra rad 2

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 5/4 & 17/12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Bytter rad 1 og 2 og så rad 2 og 3

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5/4 & 17/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

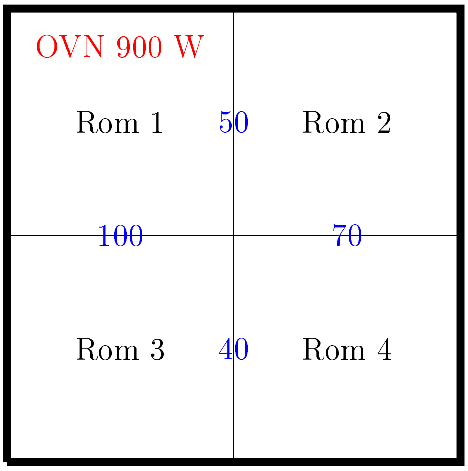
Matrisen er nå på redusert trappeform. Her blir det en én-parameter familie av løsninger (en linje av løsninger).

Vi velger den ledende koeffisienten til polynomet, a_4, som den frie parameteren. Vi kaller den for enkelhets skuld bare for a. Da er $a_0 = 4a - 1/3$. Videre er $a_3 = 1/2$, $a_2 = -5a + 11/6$ og $a_1 = 0$.

6

En leilighet har fire rom. Det er bare en leilighet i hver etasje. Vi ser bort fra varmetap til leiligheten over og under vår leilighet. Det står en ovn som avgir 900 W i rom 1. Anta at temperaturen ute er $-5°C$ og at varmetapet utover, for hver av de fire rommene, er proporsjonalt til temperaturdifferansen med varmeoverføringskoeffisient $10W/°C$. Mellom rommene er det ikke så godt isolert: Mellom rom 1 og 2 er varmeoverføringskoeffisienten $50W/°C$, mellom rom 1 og 3 er koeffisienten $100W/°C$, mellom rom 2 og 4 er koeffisienten $70W/°C$, mellom rom 3 og 4 er koeffisienten $40W/°C$. Temperaturen i rom 1 kan kalles T_1 etc. Varmetap er gitt ved temperaturdifferanse ganget med varmeoverføringskoeffisienten.

Regn ut temperaturen i de fire rommene når temperaturen har stabilisert seg.



Hint: Sett opp et regnskap for varmetap for de fire rommene og løs likningsystemet. For eksempel for rom 3 er total varmetap lik 0 derfor må

$$10(T_{ute} - T_3) + 100(T_1 - T_3) + 40(T_4 - T_3) = 0.$$

(Vi tar ikke med enhetene.) Dette er det samme som

$$100T_1 + 0 \cdot T_2 - 150T_3 + 40T_4 = 50.$$

Et lignende men enklere eksempel er gjennomgått på forelseningen 3. september 2015.

Det bør brukes regneverktøy for å løse oppgaven. Tenk over om svaret du får er rimelig. For eksempel hva er gjennomsnittstemperaturen til de fire rommene?

LF: Setter vi opp varmeregnskapet får vi matrisen.

$$\begin{bmatrix} 0 & 70 & 40 & -120 \\ 100 & 0 & -150 & 40 \\ 50 & -130 & 0 & 70 \\ -160 & 50 & 100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \\ -850 \end{bmatrix}$$

Løsningen er $T1 = 21.5°C$, $T2 = 15.8°C$, $T3 = 17.9°C$ og $T4 = 14.8°C$. Svaret virker rimelig.

Vi sjekker også at det stemmer overens med en mye enklere beregning vi kan gjøre for gjennomsnittstemperaturen til leiligheten. Gjennomsnittemperaturen er $17.5°C$ (regnet ut fra mer nøyaktige temperaturer enn de gjenngitt ovenfor). Dette er som forventet siden totalt varmetap for de fire rommene er $40W$ per grad Celsius og varmekilden er $900W$. Varmetapsfaktoren er lik for de fire rommene og varmetapet er proporsjonal til temperaturdifferanse til utetemperaturen. Varmetapet er derfor lik (gjennomsnittstemperatur minus utetemperatur) ganget med $40W/°C$. Dette er $900W$ som forventet.

Ekstra eksempel

Vi såg på ustabilitet til likningssytem mandag 3.10. Her er eksempellet vi såg på da samt mer informasjon.

Vi ser litt på stabiliteten til løsningene i et likningssytem. Små endringer i et likningssystem kan få store konsekvenser for løsningene. Her er et enkelt eksempel

$$\begin{bmatrix} 1.000001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1.000001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000001 \\ 1 \end{bmatrix}$$

har løsning hennholdsvis

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En relativ endring på en milliontedel i ene tallet i likningssystemet får store konsekvenser for løsningenen. I dette tilfellet er determinanten til koeffisientmatrisen bare 10^{-6}.

Undersøk stabiliteten til likningssytemet

$$\begin{bmatrix} 2.35643 & 1.34252 \\ 5.86695 & 3.34255 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.69895 \\ 9.20949 \end{bmatrix}$$

hvis vektoren $[3.69895, 9.20949]$ endres litt. Prøv gjerne å gjerne å gjøre små endringer i koeffisientmatrisen også. En m-fil er tilgjengelig. Hva observerer du?

Vi observerer at små endringer i koeffisientene kan føre til store endringer i løsningene. I det siste eksempelet er det akkurat samme feneomen som gjør seg gjeldene som det er i det enkle systemet først i oppgaven. De to rad (eller kolonne) vektorene i matrisen er nesten parallelle. Så for å uttrykke vektorer ved hjelp av dem kan vi komme i en situasjon hvor små endringer i vektoren som skal beskrives krever helt forskjellige sammensettninger av de to basisvektorene. I det først eksempelet er de to vektorene som skal uttrykkes søylevektorene i matrisen.

Slike fenomen må en være klar over kan oppstå når determinanten til en matrise er veldig liten i forhold til det en ville forvente utfra størrelsen på elementene i matrisen (en typisk størrelse opphøyet i dimensjonen til den kvadratiske matrisen.)

I det siste eksempelet er determinanten bare $-1.26\ldots 10^{-5}$. Inversmatrisen er omtrentlig

$$\begin{bmatrix} -2.649138102102673 & 1.064014266004960 \\ 4.649851397325777 & -1.867588666717866 \end{bmatrix} \cdot 10^5$$

Vektoren $[3.69895, 9.20949]$ er valgt slik at den gir en vektor på størrelsesorden 1 når vi ganger med inversmatrisen. Svært små endringer i denne vektoren får derfor store følger. Legger vi til en tusendel i første koordinat endres vektoren med omtrent $[-265, 465]$.

Det vi har sett her er at lineære likningssytem kan være ustabile. I mange lineære likningssytem kan vi forvente at en liten feil inn vil gi en liten feil ut, men vi kan være "uheldig" å få et ustabilt likningssystem. Dette skjer gjerne, som i eksemplene, der hvor noen rader (eller kolonner) er "nesten linært avhengige".