Innlevering	BYFE DAFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 1
Innleveringsfrist	Fredag 16. september 2016 kl 15:00
Antall oppgaver:	8

1

(Eksamensoppgaver: Det har vært med tilsvarende oppgaver siden mai 2015.)

Løs likningene og skriv svarene både på kartesisk og polar form

a) $z^2 - 2iz - i = 0$

b) $z + i = iz - \sqrt{3}$

c) $z^2(z^3 + i) = 0$

d) $(|z|^2 - 1)(|z+i| - 1) = 0$ (Hint: Lag en figur av nullpunktene til hver av faktorene.)

Det er naturlig å dra nytte av følgend egenskap til komplekse tall: $a \cdot b = 0$ hvis og bare hvis $a = 0$ eller $b = 0$. (Her som ellers i matematikk benyttes *eller* i den ikke-eksklusive betydningen: begge eller minst en er sann.)

2

(Eksamensoppgaver: august 2015 oppgave 9, mai 2016 oppgave 6)

Følgende funksjoner er kontinuerlige på de oppgitte begrensa og lukka intervallene. Ekstremalverdisetningen sier derfor at de har både maksimums- og minimumspunkt (ekstremalverdier). Bestem alle maksimums- og minimumspunkt samt ekstremalverdiene i hvert tilfelle. Det er fint om dere også finne de lokal maksimus- og minimumspunktene.

a) $f(x) = -x^2 + 3x \qquad x \in [0, 3]$

b) $f(x) = \sin x + \cos x \qquad x \in [0, \pi]$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2 \qquad x \in [-2, 3/2]$

d) $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 1/x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \qquad x \in [0, 2]$

3

(Eksamensoppgaver: august 2015 oppgave 2 og desember 2015 oppgave 7.)

Bestem parametrene a og b slik at funksjonen

$$h(x) = \begin{cases} ax + b & x < 1 \\ -x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

er deriverbar for alle x.

4

Finn alle tangentlinjene til funksjonen $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2$ som er parallelle til linjen $y = 3 - x$. (Beskriv tangentlinjene på formen $y = ax + b$.)

5

(Eksamensoppgave: Gitt på de fleste av siste års eksamenset.)

Forklar hvorfor hver av likningene nedenfor har akkurat *én* løsning i det oppgitte intervallet. (Det er naturlig å gjøre problemet om til et spørsmål om nullpunkt, ved å ta differansen av uttrykkene på høyre og venstre side av likhetstegnet. Deretter kan dere benytte (og henvise til!) skjæringssetningen og funksjonenes monotoniegenskaper (voksende eller avtagende).

Finn nummeriske estimat for løsningen i hvert tilfelle. Forsøk gjerne med Newtons metode og eller halveringsmetoden. (Hvis du er usikker på hvilke startverdi du skal benytte kan du prøve med forskjellige verdier i intervallet.) Estimer nullpunktene med 5 gjeldende siffers nøyaktighet.

Her bør matlab, geogebra eller lignende benyttes. Det blir tungvindt å benytte kalkulator. Sjekk matlabkompendiet eller kodesnutter på hjemmesiden til kurset.

a) $x^3 - x - 1 = 0 \quad [1, 2]$

b) $\sqrt[3]{x} = \dfrac{1 - x}{5} \quad x > 0$

c) $e^x = \ln(x) + 10 \quad x \geq 1$

6

(Eksamensoppgave: Tilsvarende oppgaver er gitt mange ganger på eksamen.)

Løs initialverdiproblemene

a) $y'' + 4y = 0 \qquad y(\pi/4) = 2$ og $y'(\pi/4) = 2$

b) $y'' - y' = 3 \qquad y(0) = 1$ og $y(1) = 2$

c) $2y'' - 3y' + y = e^x \qquad y(0) = 1$ og $y'(1) = 0$

7

(Eksamensoppgave: mai 2015 oppgave 7.)

Vi har en elektrisk krets med en kondensator, en motstander og en spole med henholdsvis kapasistans C, resistans R og induktans L koblet sammen. Anta kondensatoren er ladet. Vi lukker kretsen og det går en strøm I i kretsen. Strømmen i kretsen er endringraten $I = q'$ til ladningen q til kondensator. Ladningen q til kondensatoren er modelert (beskrevet) med differensiallikningen

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$$

Dei deriverte er med hensyn til tida.

a) Hvis resistansen er liten nok vil strømmen svinge frem og tilbake med avtangende styrke. Vis at dette skjer bare hvis $R < 2\sqrt{L/C}$.

b) Anta strømmen svinger frem og tilbake med en eksponentiell dempning. Hva er "perioden" til svingningen (perioden til sinusfunksjonen i beskrivelsen av den dempa svingningen)? Får resistansen svingningen til å gå fortere, saktere eller har den ingen virkning i forhold til kretsen uten motstander?

c) Anta at vi har en krets uten spole. Det svarer til at induktansen L er lik null. Vi har da differensialikningen

$$Rq' + \frac{1}{C}q = 0$$

Vi lærte av Ola Jetlund at strømmen da er på formen

$$I = Ae^{-t/(RC)}$$

Vis dette ved å løse differensiallikningen.

Ola hadde en huskeregel som sa at etter tiden "fem ganger RC" så er strømmen blitt så liten (i forhold til den strømmen vi hadde med en gang kretsen ble sluttet) at vi kan regne den som null. Vis at da er strømmen ca $1/148$ av opprinnelig strøm.

Anta nå at vi har behov for å arbeide med større nøyaktighet og krever at strømstyrken skal bli en milliontedel av opprinnelig strømstyrke, hvor langt tid må vi da vente fra kretsen sluttes?

8

Hva estimerer følgende skript løsninga av?

```
xstart=1;
xslutt=2
y=0.5;
N=400;

h=(xslutt-xstart )/N;
xVektor=xstart:h:xslutt;
yVektor(1)=y;

for i=1:N
  x=xVektor(i);
  y=yVektor(i);
  yderivert=  x^2 /y - 1;
  yVektor(i+1)=y+yderivert*h;
end

plot(xVektor,yVektor)
```