Matte 1000 ELFE KJFE MAFE 1000
Øvinger til mandag 29. august 2016

Oppgave 1-3 er av typen dere kan forvente å få på eksamen.

Oppgave 1
Løs likningen

$$i + z = 1 - \sqrt{3}iz$$

og skriv løsningen på polarform ($re^{i\theta}$).

LF: Dette er essensielt oppgave 4 fra eksamen mai 2015. Se LF til eksamenen.

Oppgave 2
Finn alle løsningene til likningen

$$z(\overline{z} - 2i) = 3$$

LF: Dette er prakisk talt oppgave 5 fra eksamen mars 2016. Se LF til eksamenen.

Oppgave 3
Finn alle (seks) løsningene til likningen

$$z^6 = -1$$

Skriv svarene eksakt både på polar og kartesisk form.

LF: Vi skriver -1 på polar som $1 \cdot e^{\pi i}$. En rot til likningen $z^6 = -1$ er derfor $\sqrt[6]{1}e^{\pi i/6}$. Vi finner alle røttene ved å gange denne ene roten med alle sjette/røttene til 1 (løsningene til $w^6 = 1$) som er $e^{2\pi m/6}$ for $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Røttene er derfor

$$e^{\pi i/6}, \quad e^{\pi i/2}, \quad e^{5\pi i/6}, \quad e^{7\pi i/6}, \quad e^{3\pi i/2}, \quad e^{11\pi i/6}$$

(Her har vi benyttet at $e^{\pi i/6}e^{\pi i/3} = e^{\pi i/2}$ siden $1/6 + 1/3 = 1/2$ etc.)

På kartesisk form er røttene

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), \quad i, \quad \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i), \quad \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - i), \quad -i, \quad \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i).$$

Oppgave 4 (Ekstraoppgave)
Forklar hvorfor løsningene til likningen

$$|z|^2 + 2\,\mathrm{Im}(z) = 3$$

er en sirkel i det komplekse plan med radius 2 og senter i punktet som svarer til $-i$. (For eksempel så ser vi lett at $i, -3i, -i \pm 2$ tilfredstiller likningen.)

Hint: Vis at $|z|^2 + 2\,\mathrm{Im}(z) + 1 = (z+i)(\overline{z} - i)$.

LF: Løsningene til likningen $|z| = r$ er en sirkel med radius r (> 0) og senter i origo. Hvis $r < 0$ er løsningen tom og hvis $r = 0$ så er løsningen $z = 0$.

Vi har at

$$(z+i)(\overline{z}-i) = z\overline{z} + (z + \overline{z}) - i^2) = |z|^2 + 2\,\mathrm{Im}(z) + 1$$

Vi har også at

$$\overline{z} - i = \overline{z+i}$$

Derfor er likningen vår ekvivalent til

$$|z+i|^2 = 3 + 1 = 4$$

(Her har vi lagt til 1 til begge sider av den opprinnelige likningen.) La $w = z + i$. Løsningen til likningen vår er derfor alle w som ugjør en sirkel med radius 2 og senter hvor $w = 0$. Siden $z = w - i$ så er altså løsningen er sirkel med radius 2 og senter i punktet $z = -i$.

Oppgave 5 (Ekstraoppgave)
Gitt en andregradslikning med reelle koeffisienter,

$$az^2 + bz + c = 0$$

hvor a, b og c er reelle tall. Forklar hvorfor den enten har akkuratt én løsning eller to løsninger hvor begge er reelle eller ingen av dem er reelle tall. (Vi kan ikkje ha én reell og én kompleks ikkje-reell løsning.) Hvis løsningene er to komplekse ikkje-reelle tall, hva er da sammenhengen mellom dem?

Vi vet at løsningene er gitt ved abc-formelen

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hvis $b^2 - 4ac = 0$ er det akkurat én (dobbel) løsning. (Vi sier at løsningen er dobbel fordi faktoren $z - (-b/(2a))$ forekommer to ganger i faktoriseringen til uttrykket.)

Hvis $b^2 - 4ac > 0$ så er det to forsjellige reelle røtter.
Hvis $b^2 - 4ac < 0$ så er det to forskjellig komplekse røtter:

$$\frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

De to røttene er kompleks konjugerte av hverandre.

BONUS: Vi skisserer hvorfor alle polynomer med reelle koeffisienter har en faktorisering som et produkt av reelle polynomer av grad 1 eller grad 2. Dette følger fra fundamentalteoremet og unik faktorisering. Hvis polynomer er reelt og r er en rot, ja da må også den konjugerte $\overline{r}$ være en rot. Produktet av de to faktorene $(z - r)(z - \overline{r})$ er polynomet $z^2 - 2\text{Re}(z) + |r|^2$ med reelle koeffisienter.