14 sep 2016

1 $\quad y'' + py' + qy = f(x)$

2. ordens lineær inhomogen diff. likning med konstante koeffisienter.

Påstand: Hvis y_1 og y_2 er løsninger, da er $(y_1 - y_2)$ en løsning til den homogene diff. likningen $y'' + py' + qy = 0$.

$$
\begin{aligned}
&(y_1-y_2)'' + p(y_1-y_2)' + q(y_1-y_2) \\
&= y_1'' - y_2'' + p(y_1'-y_2') + q(y_1-y_2) \\
&= (y_1'' + py_1' + qy_1) - (y_2'' + py_2' + qy_2) \\
&= \quad f(x) \quad - \quad f(x) \\
&= 0 \quad (\text{alle } x)
\end{aligned}
$$

✓

Løsningene til $y'' + py' + qy = f(x)$ er på formen

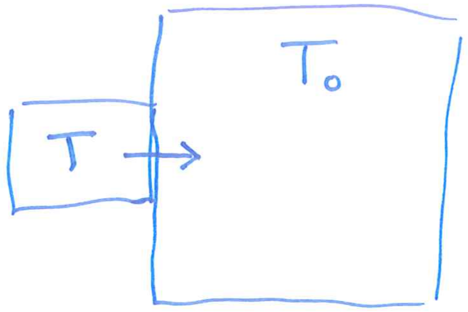
$$y_p + y_h$$

y_p: partikulær løsning (én løsning til diff likninge)

y_h: homogene løsninger

Newtons avkjølingslov

(2)



Newtons avkjølingslov sier at varmestrømmen er proporsjonal til temperatur differansen

$$\boxed{T'_{(t)} = -k(T - T_0)} \qquad k > 0$$

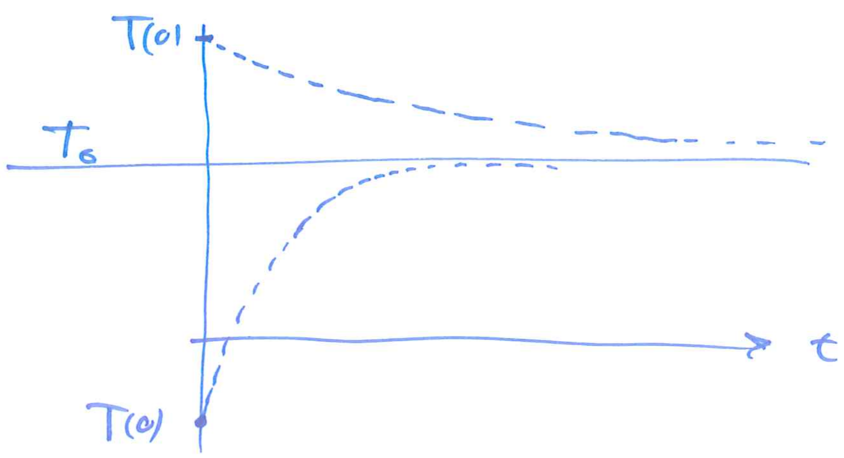
$$T' + kT = +k \cdot T_0 \qquad (\text{konstant})$$

Homogene løsninger : $\quad T' + kT = 0$

$$T_h = A e^{-kt}$$

Partikulær løsning $\quad T_p = T_0$

Løsningene er $\quad T(t) = T_0 + A e^{-k \cdot t}$



$T(0) = T_1$

setter $t=0$

(3) $T_0 + A \cdot e^0 = T_1$ så $A = T_1 - T_0$

$$T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)\, e^{-kt}$$

Eksempel $T_0 = 0°C$

$T_1 = 200°C$

Etter 1 time er $T = 100°C$.

Bestem $T(t)$

$$100°C = 0°C + (200°C)\, e^{-k\cdot 1}$$

$$e^{-k\cdot 1} = e^{-k} = \frac{100°C}{200°C} = \frac{1}{2}$$

$$\ln(e^{-k}) = \ln(\tfrac{1}{2}) = \ln(2^{-1})$$

$$-k = -1 \cdot \ln 2$$

$$k = \ln 2.$$ (1 time er "halveringstiden")

$$T(t) = 200°C\, e^{-\ln 2 \cdot t}.$$

Når er $T(t) = 50°C$? Når $t = 2$ timer

$T(t) = 12.5°C$? $t = 4$ timer

(4) $y'' + py' + qy = f(x)$

$f(x)$ polynom av grad n.

Prøv med y et polynom av samme grad for å finne en partikulær løsning.

Fungerer når $q \neq 0$. Hvis $p \neq 0, q = 0$ forsøke med polynomer av grad en mer enn graden til f.

$y'' + py' + qy = Ae^{cx}$ $\left(+\bar{A}e^{\bar{c}x}\right)$.

Prøver med $y_p = ke^{cx}$

Setter inn: $(c^2 + p \cdot c + q) \cdot ke^{cx} = Ae^{cx}$

$\underline{k = \frac{A}{c^2+pc+q}}$ når c ikkje er en rot til $r^2+pr+q=0$.

(e^{cx} ikkje er en homogen løsning!)

Anta c er en enkel rot til $r^2+pr+q=0$

Da vil $y_p = k \cdot xe^{cx}$ være en partikulær løsning. (passende k)

Hvis c er en <u>dobbel rot</u> til $r^2+pr+q=0$

Da vil $y_p = kx^2e^{cx}$ være en partikulær løsning (passende k)

(spørsmål om røtter til polynomer)

(5) $r^2 + 4r + 3 = 0$

$(r+3)(r+1) = 0$ To røtter $r=-1$, $r=-3$

$r^2 + 2r + 1 = 0$

$(r+1)^2 = 0$ (dobbel) én rot $r=-1$.

Den forekommer 2 ganger

Eksempler

$$y'' + 4y' + 3y = e^{-x}$$

$$y_h = Ae^{-x} + Be^{-3x}$$

$$y_p = k \cdot x \cdot e^{-x}$$

$$y_p' = k(e^{-x} + x(-e^{-x}))$$

$$y_p'' = k(-e^{-x} - (e^{-x} + x(-e^{-x})))$$

$$= k(-2e^{-x} + xe^{-x})$$

setter inn:

$$k[(-2e^{-x} + xe^{-x}) + 4(e^{-x} - xe^{-x}) + 3xe^{-x}] = e^{-x}$$

kansellere

$$k(-2+4) \cdot e^{-x} = e^{-x}$$

$$k \cdot 2 = 1 \qquad \underline{k = 0.5}$$

$$y_p = 0.5xe^{-x} = \frac{1}{2} \cdot xe^{-x}$$

Løsningene er $\underline{y = \frac{x}{2}e^{-x} + Ae^{-x} + Be^{-3x}}$

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

(-1 er en dobbel rot til r^2+2r+1)

$$y_p = k \cdot \underline{x^2}\, e^{-x}$$

$$y_h = A e^{-x} + B x e^{-x}.$$

(onsdag 7 sep.)

6

Setter inn y_p:

$$y_p' = k e^{-x}(-x^2 + 2x)$$

$$y_p'' = k e^{-x}(-2x - 2x + x^2 + 2)$$

$$k e^{-x}\left[(-4x + x^2 + 2) + 2(-x^2 + 2x) + x^2\right]$$

$$= k e^{-x}\left[x^2 - 2x^2 + x^2 - 4x + 4x + 2\right]$$

$$= 2k e^{-x}.$$

Derfor må $2k = 1$

$$\underline{k = 1/2}$$

$$\underline{y = \left(\frac{x^2}{2} + Bx + A\right) e^{-x}}$$

$$y'' + 3y' + 2y = \sin x \;\; " \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)$$

7

$$y_p = k \sin x + l \cos x$$ (både sin og cos !)

$$y_p' = k \cos x + l(-\sin x)$$

$$y_p'' = -(k \sin x + l \cos x) = -y$$

setter inn

$$\underbrace{\underbrace{(-y)}_{y''} + 2y}_{y} + 3y' = 1 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x$$

$$k \sin x + l \cos x + 3(-l \sin x + k \cos x) = \sin x$$

$$(k - 3l) \sin x + (l + 3k) \cos x = 1 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} l + 3k = 0 \\ k - 3l = 1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} l = -3k \\ k - 3(-3k) = 10k = 1 \end{array}$$

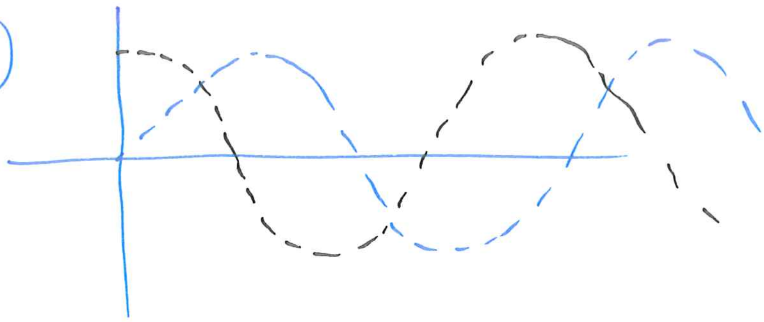
så $k = \frac{1}{10}$ $\quad l = -3k = \frac{-3}{10}$

$$\underline{y_p(x) = \frac{1}{10} \sin x - \frac{3}{10} \cos x}.$$

$$(y_h = Ae^{-x} + Be^{-2x})$$

Grafen til $\sin x$ og $\cos x$

⑧



$$A \sin x + B \cos x = C \sin(x + V)$$

Hvordan ser grafen til

$\sin(ax) + \sin(bx)$ ut?

$$= \sin\left(\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right)x\right) + \sin\left(\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)x\right)$$

addisjonsformelen for sin gir:

$$= 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2} x\right)$$

Tegn gjerne opp i geogebra og

varier a, b og gjerne amplitudene

også.

Harmonisk svingning med resonanse

(9) $y'' + 4y = 0$

$y_h = A\sin(2x) + B\cos(2x)$

$y'' + 4y = \sin(2x)$

Prøver med $y_p = x(k\sin(2x) + l\cos(2x))$

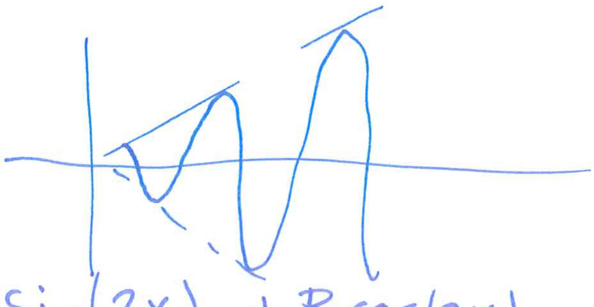
$y_p' = (k\sin(2x) + l\cos(2x)) + x(k(2\cos(2x)) + l(-2\sin(2x)))$

$y_p'' = 2k(2\cos(2x)) - 2l\sin(2x)$
$= x(-4)(k\sin(2x) + l\cos(2x))$

Setter inn for y_p'' og y_p:

$\cos(2x)(4k - 4x\cdot l) + \sin(2x)(-4l - 4xk)$
$+ 4x(k\sin(2x) + l\cos(2x)) = \sin(2x)$

Gir $4k = 0$ og $-4l = 1$, $k = 0$, $l = -\frac{1}{4}$



$y_p = \frac{-x}{4}\cos(2x)$

$y = \underbrace{\frac{-x}{4}\cos(2x)}_{y_p} + \underbrace{A\sin(2x) + B\cos(2x)}_{y_h}$