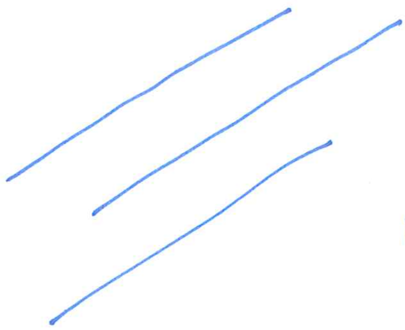
5.09.2016

Differensiallikninger

(1) $2x - 3 = 5$ løsning $x = 4.$ (likning)

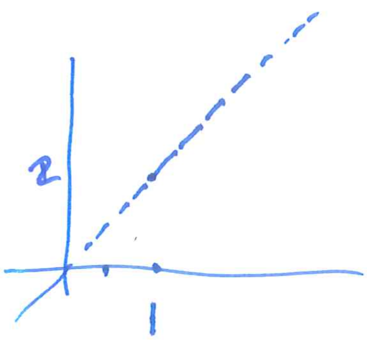
(diff.likning) $y'_{(x)} = 2$ løsningene er rette linjer med stigningstall 2



$y = 2x + b$

$b \in \mathbb{R}$

mange løsninger.



$y'' + y = 0$ Løsninger

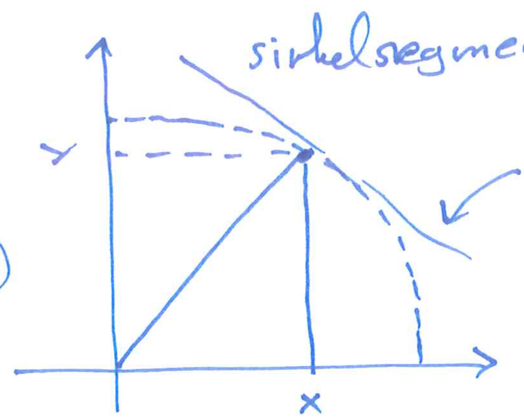
$y_{(x)} = A\sin(x) + B\cos(x)$

$A, B \in \mathbb{R}$

2.ordens diff.likning $\Rightarrow$ 2 frihetsgrader.

Løsningene til diff.likninger er funksjoner.

2



stigningstall $\frac{-x}{y}$

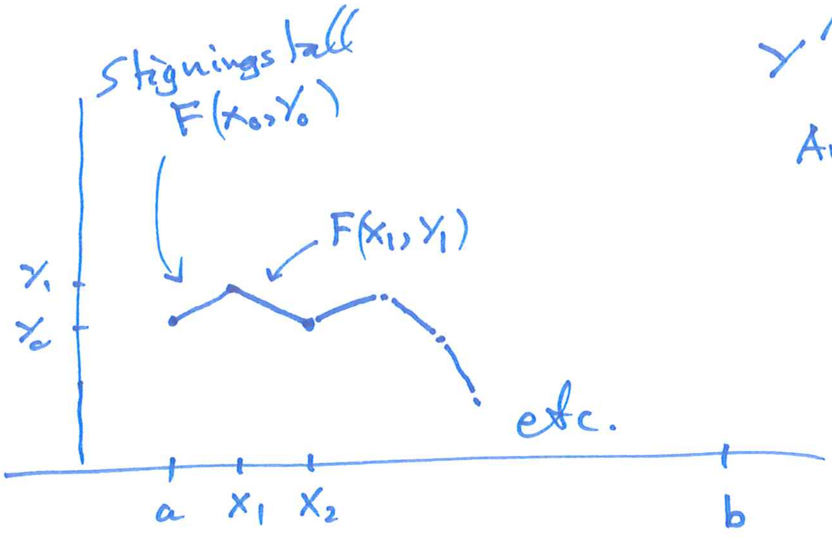
$$y' = \frac{-x}{y}$$

har løsninger: sirkelsegment.

$$\left(\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ y &= \sqrt{r^2 - x^2} \\ &= (r^2 - x^2) \end{aligned} \qquad y' = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{y} \right)$$

Eulers metode

(for å finne tilnærma løsninger til differensiallikninger.)



$$y' = F(x, y)$$

Anta $y(a)$ er gitt.

Deler $[a, b]$ i N like deler $\quad d = \frac{b-a}{N}$

$$a = x_0, x_1, \dots, x_N = b$$

$y_0 = y(a)$ startverdi:

$$y_{n+1} = y_n + d \cdot F(x_n, y_n)$$

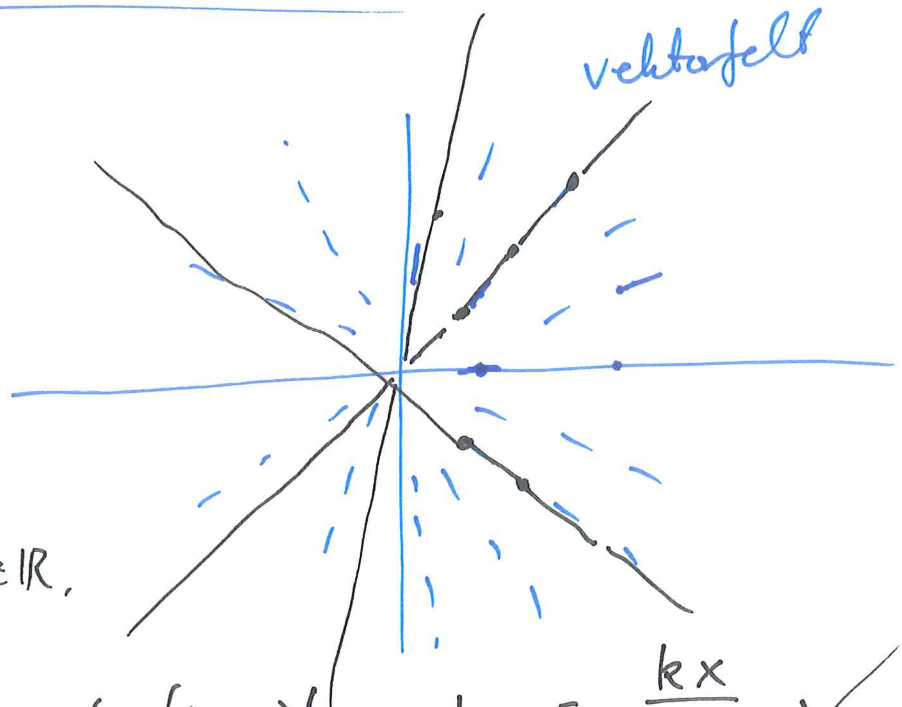
Rekursiv formel

Drar linjer mellom punktene

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$

Det gir en graf av en funksjon på $[a, b]$.

3



$y' = \frac{y}{x}$

Ser ut som om løsningene er $y = k \cdot x$

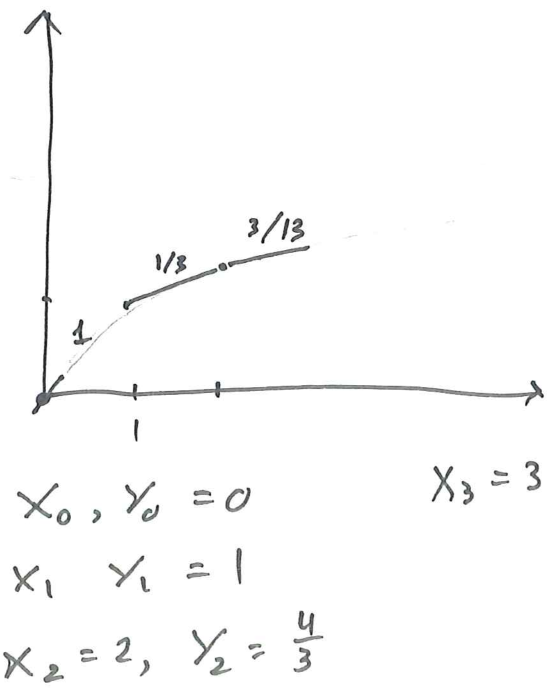
$k \in \mathbb{R}$.

Det stemmer: $y' = (kx)' = k = \frac{kx}{x}$ ✓

så $y' = \frac{y}{x}$.

$y' = \frac{1}{1+x+y}$

$y(0) = 0$



$x_0, y_0 = 0$

$x_1 \quad y_1 = 1$

$x_2 = 2, \; y_2 = \frac{4}{3}$

$x_3 = 3 \quad y_3 = \frac{3}{13} + \frac{4}{3}$

$\vdots$

$y' = y^2$ Undersøkte denne diff. likningen

$y(0) = 0.5$ numerisk.

Rundt $x = 2$ (2.01) ble y-verdiene veldig

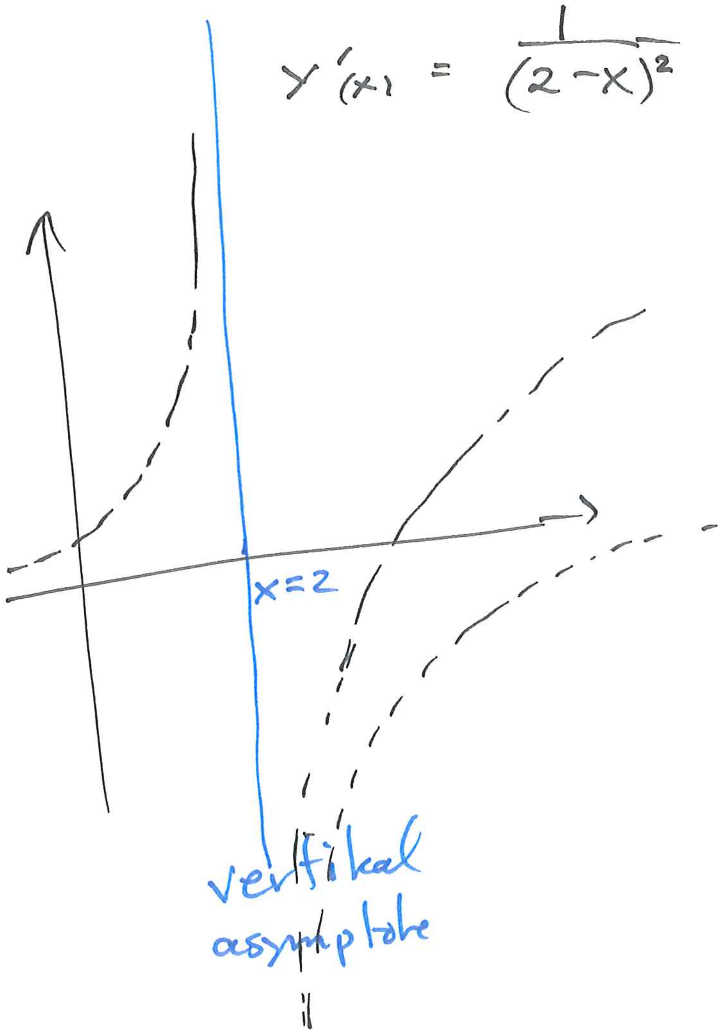
4 Store (10^{300})

Påstand $y(x) = \frac{1}{2-x}$ er en løsning.

sjekker: $y(0) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$. ✓

$y'(x) = \left((2-x)^{-1}\right)' = \frac{-(2-x)'}{(2-x)^2} = \frac{(-1)\cdot(-1)}{(2-x)^2}$

$y'(x) = \frac{1}{(2-x)^2} = y^2$ ✓



Løsningen vokser så fort at med startverdien $y(0) = \frac{1}{2}$ så kommer den seg ikkje forbi $x = 2$!

$$y' = k \cdot y$$

eksponensiell vekst $k > 0$

eksponentiell avtakning $k < 0$

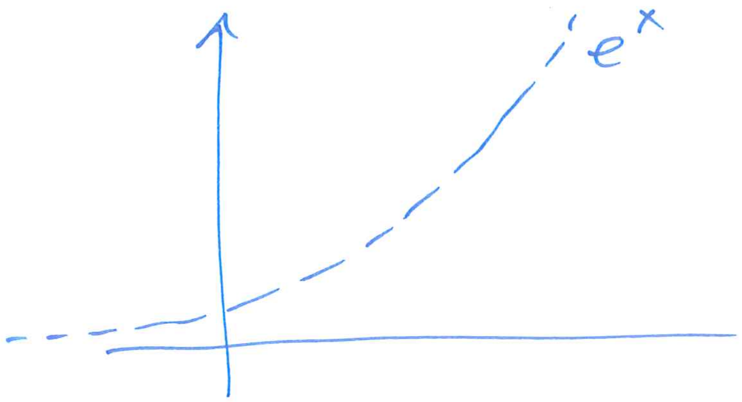
(eventuelt $y' = -ky$, $k > 0$)

5

Løsningene er:

$$y(x) = A e^{k \cdot x}$$

$$\left((e^{kx})' = e^{kx} \cdot (kx)' = k e^{kx} \right)$$



Til onsdag: Undersøke

$$y' = \frac{x}{y}$$