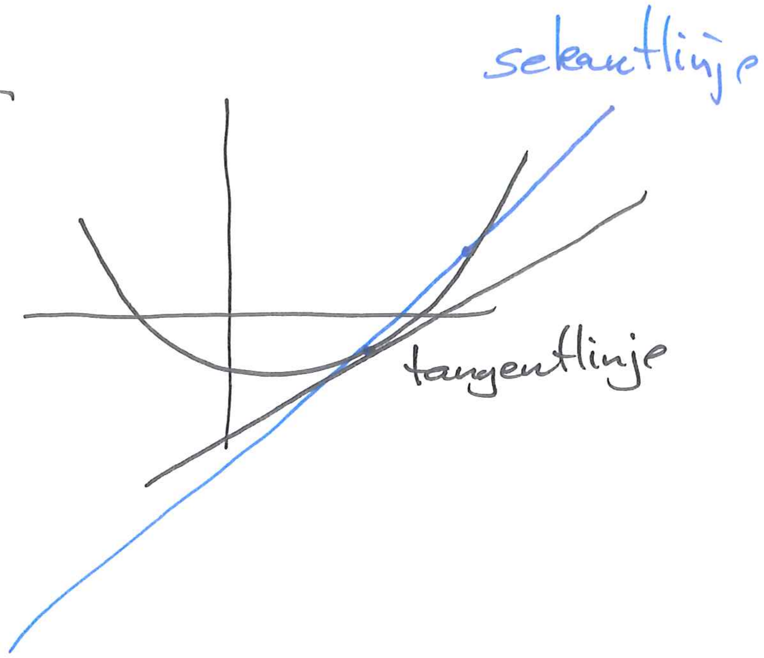
31. august 2016 Derivasjon

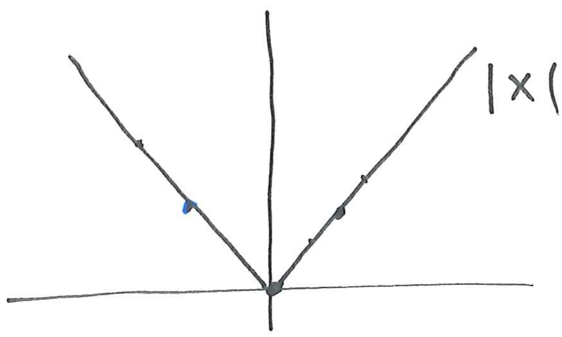


(1)

Tangentlinjen til $f(x)$ i $(a, f(a))$ er grensen av sekantlinjene gjennom $(a, f(a))$ og $(c, f(c))$ når c nærmer seg a.

Den deriverte $f'(x)$ til $f(x)$ er stigningstallet til tangentlinjen til f i $(x, f(x))$.

$f'(x)$ (og tangentlinjen) behøver ikkje eksistere.

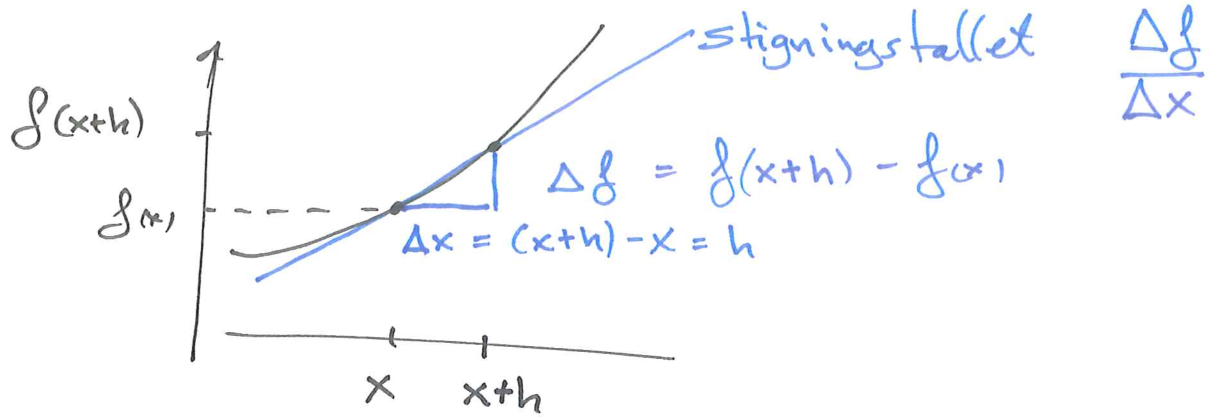


$a = 0$ Tangentlinjen i $(0,0)$ eksisterer ikkje!

$f(x) = |x|$ er ikkje deriverbar i 0.

$$(|x|)' = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

2



Den deriverte $\quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Alternativ notasjon : $\quad f'(x) = \frac{df}{dx}$ Leibniz notasjon

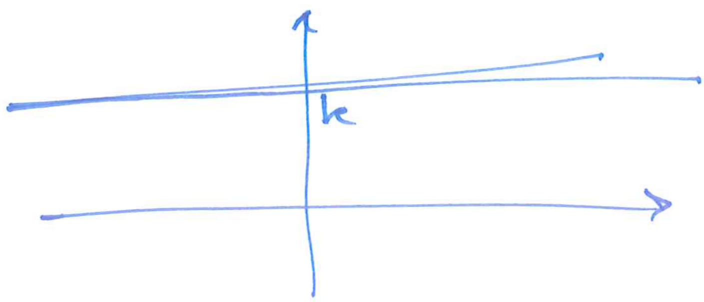
Derivasjon er lineær

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x) \qquad k \text{ konstant}$$

$$((f+g)(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Eksempler: $\quad f(x) \equiv k \quad$ konstant funksjon (lik k for alle x)

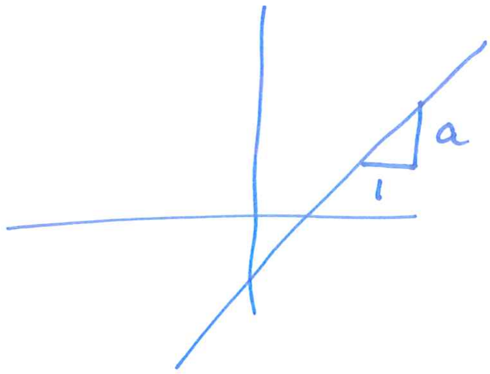
$f'(x) \equiv 0 \quad$ (alle x)



3

$f(x) = ax + b$

$f'(x) = a$



$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$ Fra definisjonen:

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2$$
$$= x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

Stigningstallet til sekant linjen gjennom $(x, f(x))$ og $(x+h, f(x+h))$ er

$h = \Delta x$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2xh + h^2}{h} = \underline{2x + h}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x$$

4 $\boxed{(x^r)' = r x^{r-1}}$ r reelt tall

$$(x^2)' = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = \underline{\frac{-1}{x^2}}$$

$$f(x) = 4x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 4 \cdot (x^3)' - 3(x)' = 4 \cdot 3 \cdot x^2 - 3(1 \cdot x^0)$$

$$= \underline{12x^2 - 3}$$

$$f(x) = x^{3.477} \qquad f'(x) = \underline{3.477\, x^{2.477}}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \qquad \left(\begin{array}{l} \frac{1}{x} = x^{-1} \\ \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{(x^5)^{1/3}} = \frac{1}{x^{5/3}} = (x^{5/3})^{-1}$$

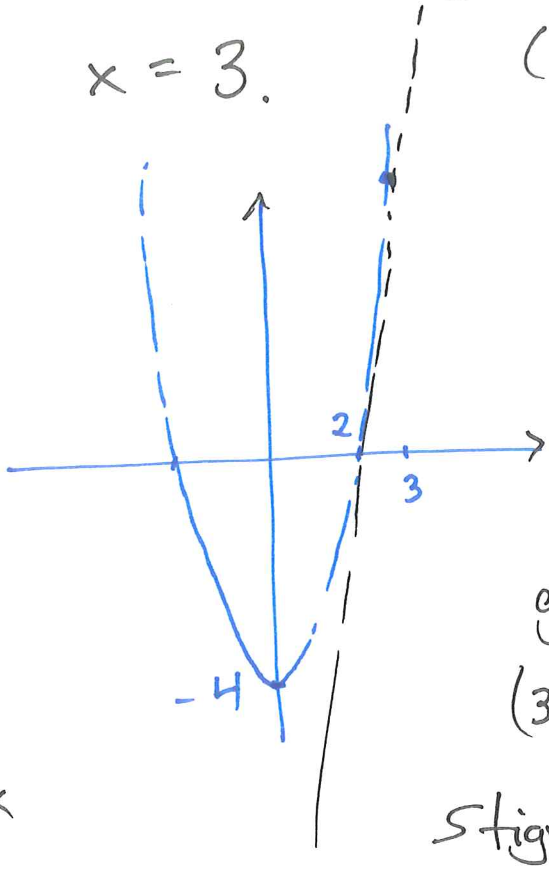
$$f(x) = x^{-5/3} \quad \text{Så} \quad f'(x) = -\frac{5}{3} x^{-\frac{5}{3}-1}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{5}{3} \cdot x^{-8/3}}}$$

Finn tangentlinjen til $f(x) = x^2 - 4$ for $x = 3$.

5

(Beskriv linjen på formen $y = ax + b$)



$f(3) = 3^2 - 4 = 5$

Tangentlinjen går gjennom punktet $(3, f(3)) = (3,5)$

$f'(x) = 2x$

$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

Stigningstallet er $f'(3) = 6$

$y = ax + b$ a stigningstallet.

$y = 6 \cdot x + b$ setter inn (3.5)

$5 = 6 \cdot 3 + b$. $b = 5 - 18 = \underline{-13}$

Ettpunktsformelen $y = a(x - x_0) + y_0$

$= ax + (y_0 - ax_0)$

Resultat: Deriverbar $\Rightarrow$ kontinuerlig

6

Høyere ordens derivert

$$\left(f'(x)\right)' = f''(x) \qquad \left(\left(f'(x)\right)'\right)' = f'''(x)$$

$f^{(n)}(x)$ n-te derivert til f.

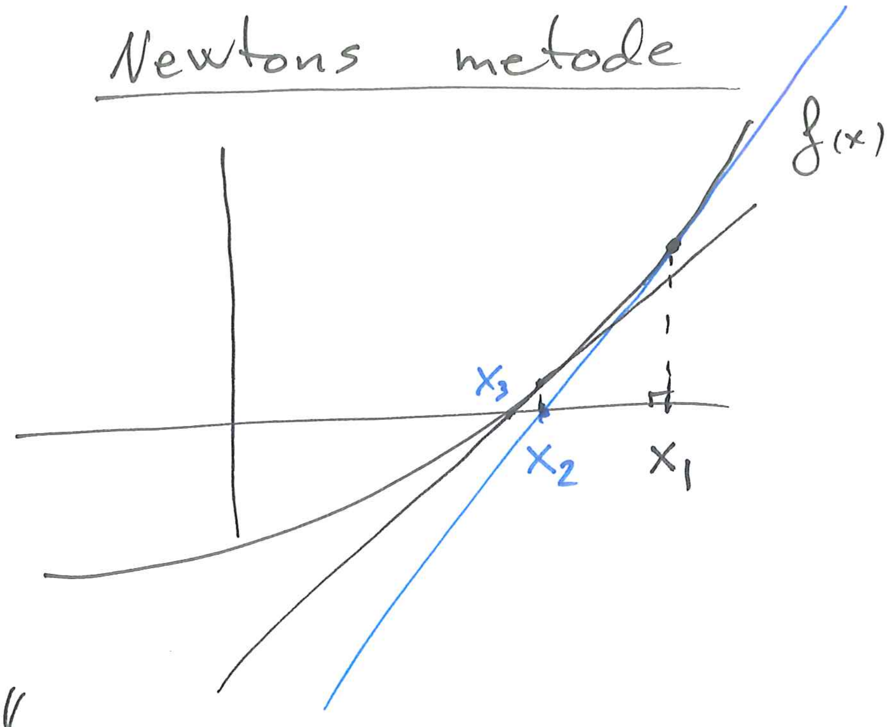
$f^{(7)}(x)$ $\left(= f'''''''(x)\right)$

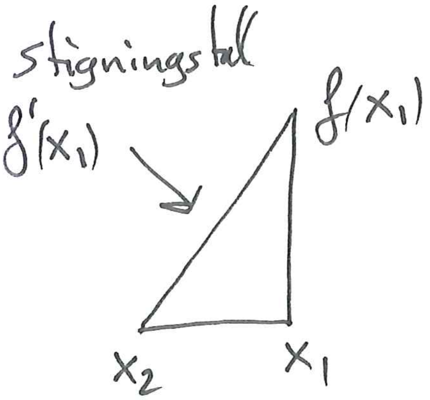
Alternativt $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

$$\left(x^3\right)'' = \left(3x^2\right)' = 6x.$$

7

Newtons metode





$$\frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2} = f'(x_1)$$

$$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - x_2$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Rekursiv formel

(erstattet x_1 med x_n
x_2 med x_{n+1})

Eksempel: $f(x) = x^2 - 2$

(nullpunkt $\pm\sqrt{2}$) $f'(x) = 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - (x_n^2 - 2)}{2x_n}$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}}$$

8

$x_1 = 2$

$$x_2 = \frac{2^2+2}{2\cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

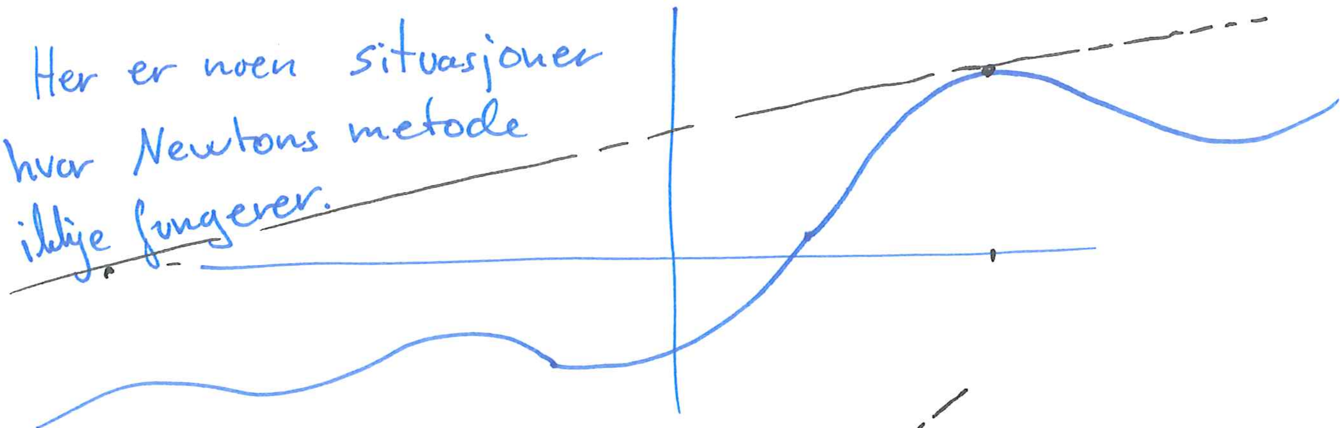
$$x_3 = \frac{(1.5)^2+2}{2\cdot 1.5} = \frac{4.25}{3} = 1.416\ldots$$

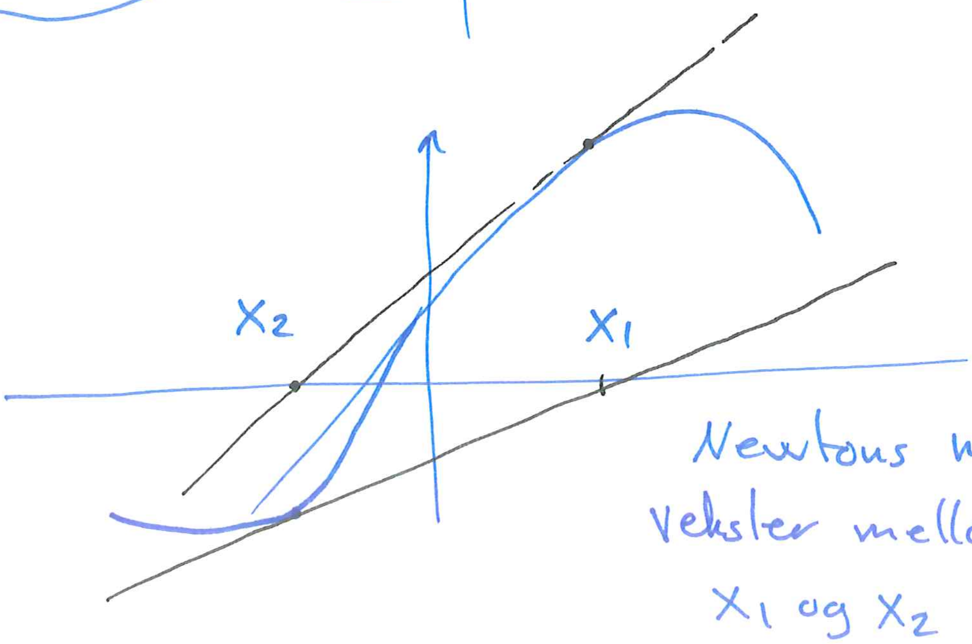
$$x_4 = \frac{x_3^2+2}{2\cdot x_3} = 1.414256\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1.414213$$

Newtons metode er svært effektiv (når den virker)

Her er noen situasjoner hvor Newtons metode ikkje fungerer.





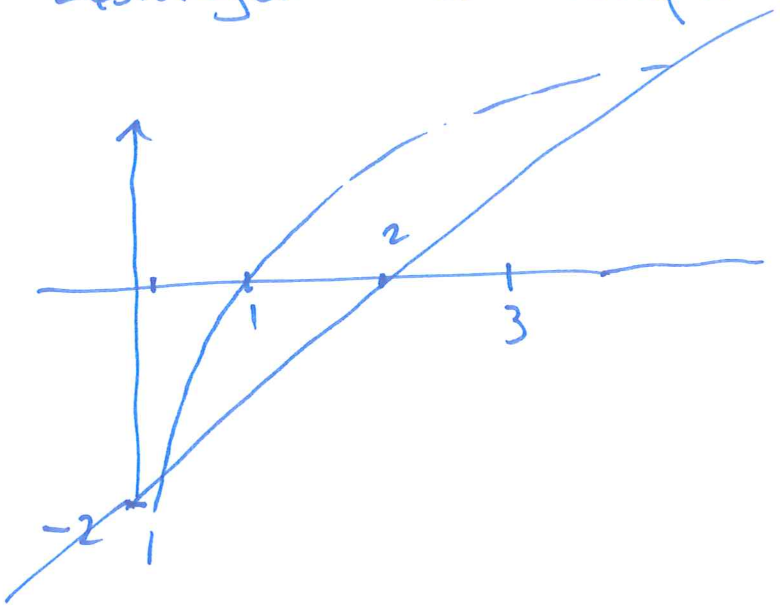
Newtons metode veksler mellom x_1 og x_2

Estimer løsningene til likningen

(9) $$\ln x = x-2 .$$

Løsninger er nullpunkt til $f(x) = \ln x - (x-2)$

$$= \ln(x) - x + 2$$



Forvente en verdi litt større enn 3

Forvente en verdi nær $\frac{1}{4}$.

Newtons metode med $x_1 = 3$: $x = 3.14619\ldots$

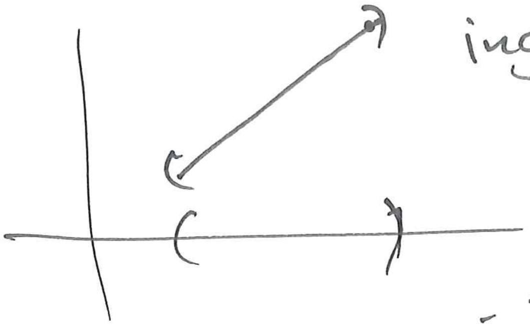
$x_1 = \frac{1}{5} = 0.2$ $x = 0.15859\ldots$

(Vi har benyttet geogebra)

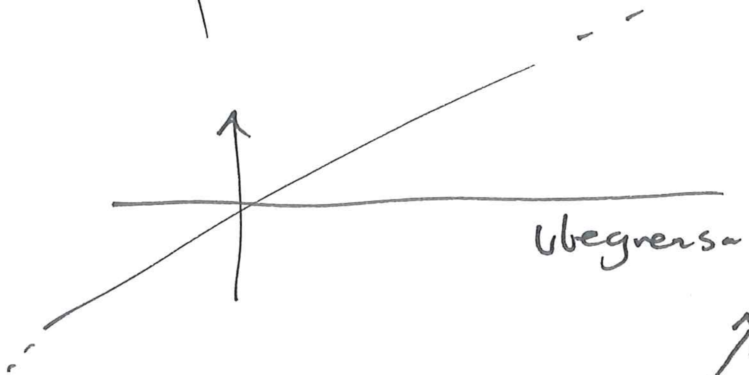
Ekstremalverdisetningen

La $f(x)$ være en kontinuerlig funksjon på et begrenset og lukket intervall ($[a, b]$).

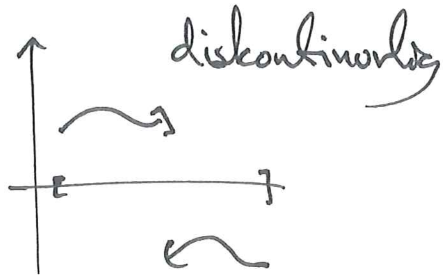
Da har $f(x)$ maksimums og minimumspunkt.

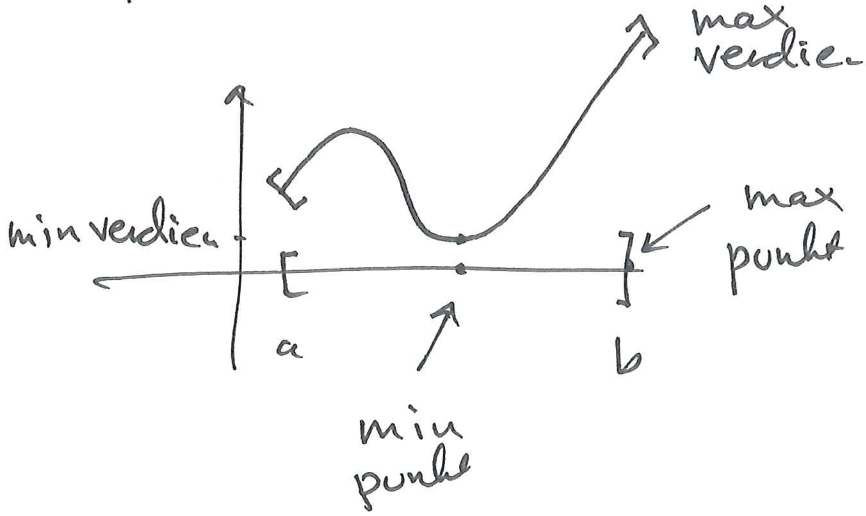


ingen max/min punkt



ingen max/min punkt





m er et maksimumspunkt for $f(x)$ hvis
$f(m) \geq f(x)$ for alle x i definisjonsmengden

m er et lokalt maksimumspunkt for $f(x)$ hvis
m er et maksimumspunkt for f avgrenset til et
tilstrekkelig lite intervall (i def.mengden) rundt m.