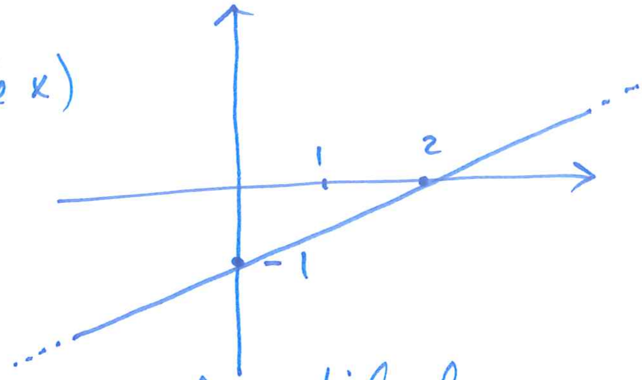
29.08.2016 faneh

Facebook gruppe HiOA M1000 2016H

1

Kontinuerlige funksjoner og halveringsmetoden

$f(x) = \underbrace{\frac{x}{2} - 1}_{\text{funksjonsuttrykk}}$ (for alle x)

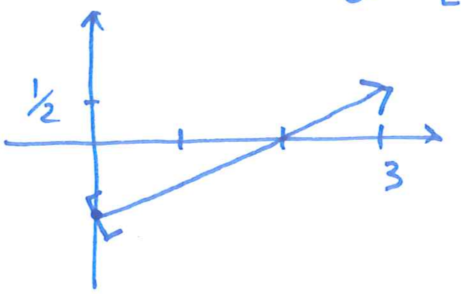


grafen til $f(x)$ er samlingen av alle punktene $(x, f(x))$

$g(x) = \frac{x}{2} - 1$

Definisjons-mengde

$D_g = [0, 3\rangle$



$[$ endepunktet er med

$\langle \cdots \langle \cdots$ endepunktet er ikkje med

Verdimengden V_f til $f(x)$ er samlingen av alle funksjonsverdier til f

I eksemplene ovenfor: $V_f = \mathbb{R}$ $V_g = [-1, \frac{1}{2}\rangle$

Gitt et funksjonsuttrykk f så er den naturlige definisjonsmengden er den største mulige def.mengden

Eks $f(x) = \frac{1}{x}$ nat. def mengde alle reelle tall ulik 0

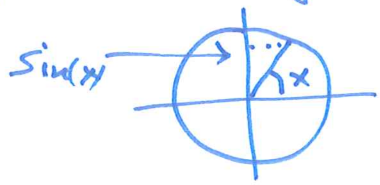
$\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$ eller $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hva er naturlig def. mengde til

② $h(x) = \frac{1}{x^3 - 4x}$? $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$

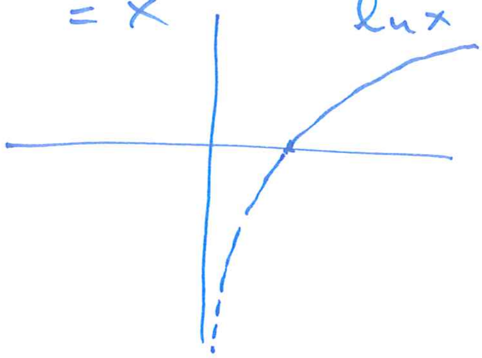
$= \frac{1}{x(x^2-4)}$

Andre funksjoner * $\sin(x)$ geometrisk definisjon

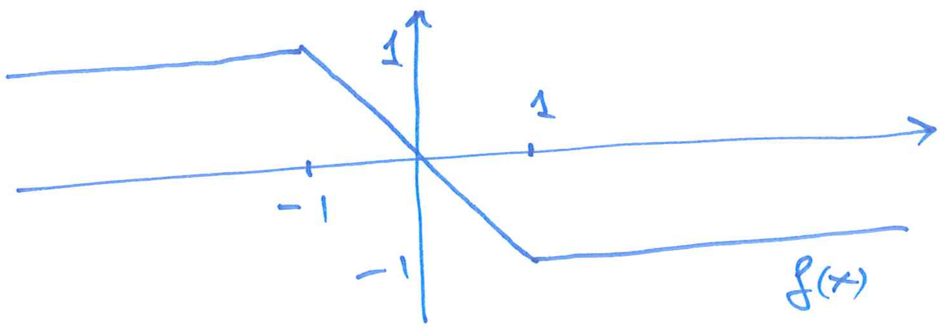


* $\ln x$ definert ved $e^{\ln x} = x$

nat. def. mengde for $\ln x$ er $\langle 0, \infty \rangle$

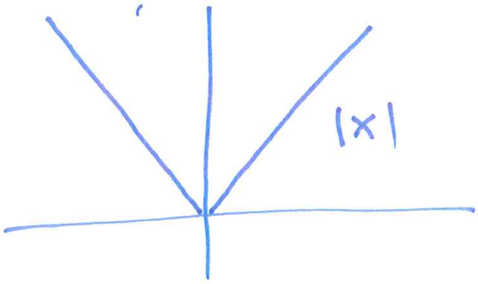


Funksjoner gitt ved delt forskrift



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq -1 \\ -x & -1 < x < 1 \\ -1 & 1 \leq x \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



(3) $= |x|$ absoluttverdien til x

---

sum av to funksjoner

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sin x$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Sammensetning av funksjoner

$f(x) = e^x \qquad g(x) = 2x - 1$

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x) = e^{2x-1}$$

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 2 \cdot e^x - 1$$

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Skriv $\sin^3(2x-1)$ som en sammensatt funksjon (av enklere funksjoner)

Først $2x-1$, deretter $\sin x$, og tilsist x^3

$$\left(\sin(2x-1)\right)^3$$

$f = 2x-1, \quad v = \sin x \qquad r = x^3$

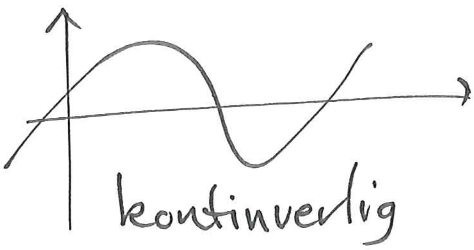
$\sin^3(2x-1) = r \circ v \circ f(x)$

De elementære funksjonene er bygd opp fra funksjonene 1, x, $\sin x$, $\arcsin x$, e^x, $\ln x$

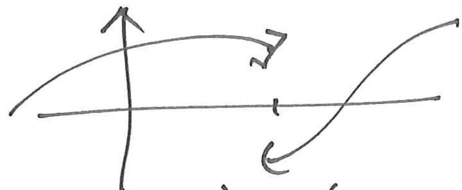
$$\left(\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad x^r = e^{r \ln x} \right)$$

4

Kontinuitet



kontinuerlig



diskontinuerlig

En funksjon $f(x)$ er kontinuerlig i $x=a$ hvis $f(x)$ nærmer seg $f(a)$ når x nærmer seg a.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

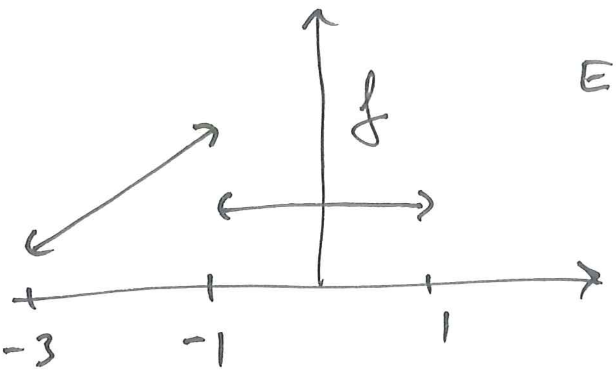
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ 1.000001 & x \geq 1 \end{cases}$$

Funksjonen er diskontinuerlig i $x=1$, selv om grafen ser ut som linjen $y=1$.

De elementære funksjonene er kontinuerlige.

Eksempel

5



Er $f(x)$ kontinuerlig?

ja!

($f(x)$ er ikkje definert i -1)

Skjæringssetningen

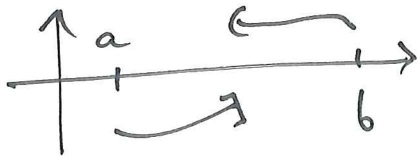
Anta $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon på $[a,b]$. Hvis $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn, da finnes det en c slik at

$$f(c) = 0 \qquad a < c < b$$

(nullpunkt)

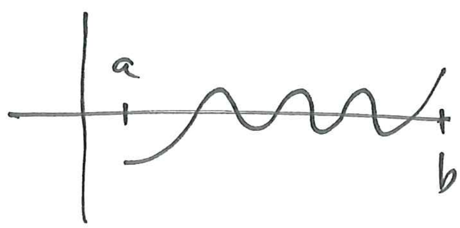
$f(a) < 0, \quad f(b) > 0$

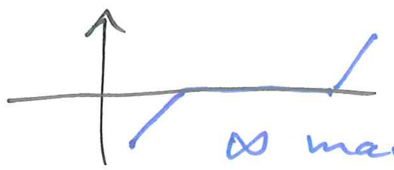
(f ikkje kont.: galt



)

Det kan være mange nullpunkt:





∞ mange nullpunkt

Eks. Skjæringssetningen gir eksistens av n-te røtter.

6

$a > 0$ $\qquad f(x) = x^n - a.$

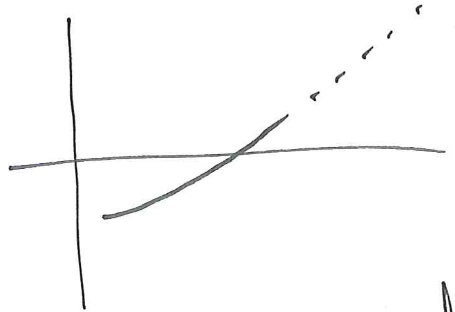
$f(x)$ kontinuerlig.

$f(0) = -a < 0$

$f(a+1) = (a+1)^n - a > 0$

Skjæringssetningen gir eksistens av et tall $0 < c < a+1$ slik at $\underline{c^n = a}$.

$f(x)$ er en voksende funksjon for $x > 0$ $\left(f'(x) = n x^{n-1} > 0 \text{ når } x > 0 \right)$



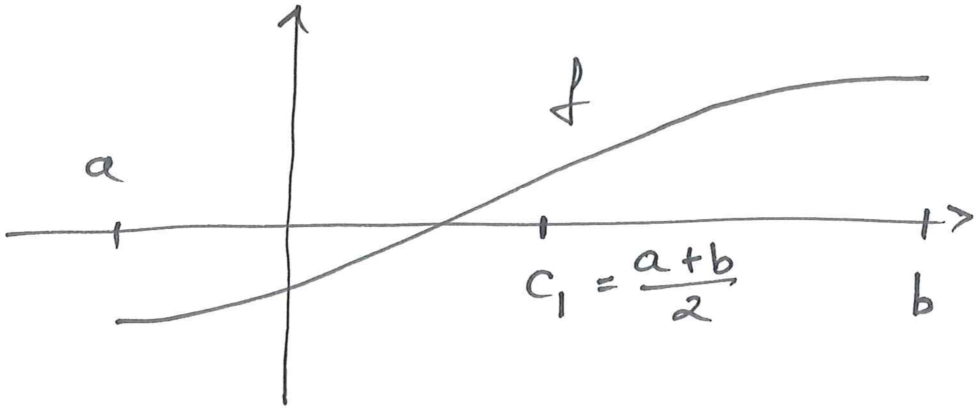
Voksende kont. funksjoner på $[a, b]$ har maksimalt ett nullpunkt.

Det finnes akkurat én verdi $c > 0$ slik at $c^n = a$.

Denne verdien kalles n-te roten til a og skrives $\underline{\sqrt[n]{a}}$.

Halveringsmetoden

7 En metode for å estimere nullpunkt til kontinuerlige funksjoner.



f kont.

a, b s.a $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn

$f(a) \cdot f(b) < 0$

c_1 midt mellom a og b.

Hvis $f(a) \cdot f(c) < 0$, la $b_1 = c_1$ beholde a $a_1 = a$

ellers $b_1 = b$ og $a_1 = c_1$

Gjenta prosedyren.

Eksempel: Estimat av $\sqrt{2}$ ved halveringsmetoden

$f(x) = x^2 - 2$. kontinuerlig

$f(1) = -1$ $f(2) = 2$

$a = 1$, $b = 2$

$c = \frac{2+1}{2} = 1.5$ $f(1.5) = (1.5)^2 - 2 = 0.25 > 0$

$a_1 = 1 \qquad b_1 = 1.5$

8 $c_2 = \frac{b_1 + a_1}{2} = 1.25$

$f(c_2) = (1.25)^2 - 2 < 0$

$a_2 = 1.25 \qquad b_2 = 1.5$

$c_3 = 1.375$

$f(c_3) < 0$

$a_3 = 1.375 \qquad b_3 = 1.5$

$\vdots$

starter med $\begin{pmatrix} a = a_0 \\ b = b_0 \end{pmatrix}$

Bredden til intervallet $[a_n, b_n]$

er lik $\frac{1}{2^n} \cdot$ bredden til $[a, b]$

$= \underline{\frac{b-a}{2^n}}$

$2^{10} = 1024 \qquad 2^{30} = (2^{10})^3 = (1024)^3 > 10^9$

$2^{50} > 10^{15}$

Eksempel Hvordan lage arcsin = $\sin^{-1}$ funksjon

$f(x) = \sin x - a$ konst.

Halveringsmetoden med startintervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

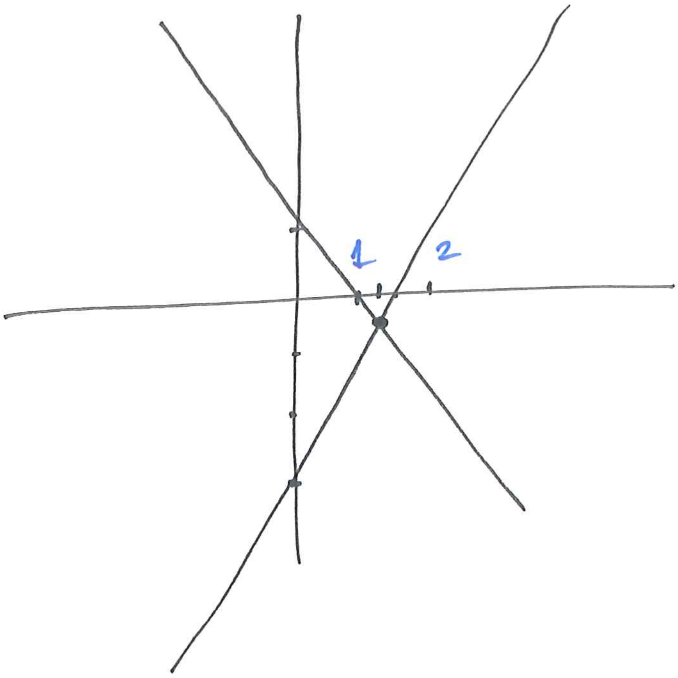
Øvingstimen

$$2x - 3 = -x + 1$$

$$2x + x - 3 = 1$$

$$3x = 1 + 3 = 4$$

$$\underline{x = 4/3}$$



$$z + 1 = iz + 3$$

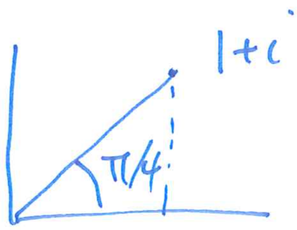
polar form.

$$z - iz = 3 - 1 = 2$$

$$z(1 - i) = 2$$

$$z = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{2(1+i)}{2}$$

$\underline{z = 1+i}$ kartesisk



$$|z| = \sqrt{2}$$

$\underline{z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}$ polar form