Innlevering	DAFE ELFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 4
Innleveringsfrist	Onsdag 29. april 2015
Antall oppgaver:	$9+4$ (kan bli endringer)

1

Finn de ubestemte integralene

a)

$$\int 2x - 3 - 4/x \, dx$$

LF:

$$\int 2x - 3 - 4/x \, dx = \underline{x^2 - 3x - 4\ln|x| + C}$$

b)

$$\int -2\sqrt[5]{x^3} + \frac{x}{2x+1} \, dx$$

LF: Vi utfører polynomdivisjon

$$\int -2\sqrt[5]{x^3} + \frac{x}{2x+1} \, dx = \int -2x^{3/5} + \frac{1}{2} + \frac{-1/2}{2x+1} \, dx$$

$$= \frac{-2x^{8/5}}{8/5} + \frac{x}{2} + \frac{-1}{2}\frac{\ln|2x+1|}{2} + C = \underline{\frac{-5x^{8/5}}{4} + \frac{x}{2} + \frac{-1}{4}\ln|2x+1| + C}$$

c)

$$\int -\pi x^2 e^{3x^3} \, dx$$

LF: Vi benytter substitusjon med $u = 3x^3$

$$\int -\pi x^2 e^{3x^3} \, dx = \underline{\frac{-\pi}{9} e^{3x^3} + C}$$

d)

$$\int \frac{t}{\sqrt[3]{3t+2}} \, dt$$

LF: Vi forsøker med substitusjonen $u = 3t+2$. Da er $t = (u-2)/3$ og $dt = du/3$.

$$\int \frac{t}{\sqrt[3]{3t+2}} \, dt = \int \frac{(u-2)/3}{\sqrt[3]{u}} \frac{1}{3} \, du = \frac{1}{9} \int u^{2/3} - 2u^{-1/3} \, du$$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{3}{5}u^{5/3} - 3u^{2/3}\right) + C = \underline{\frac{(3t+2)^{5/3}}{15} + \frac{-(3t+2)^{2/3}}{3} + C}$$

2

Finn de bestemte integralene

a)

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

LF: Vi benytter substitusjonen $u = x^2+1$. Da er $du = 2xdx$.

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_{u(0)}^{u(2)} \frac{1/2}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int_1^5 u^{-1/2}\,du = u^{1/2}|_1^5 = \underline{\sqrt{5}-1}$$

b)

$$\int_0^2 \frac{2x^5}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

LF: Denne oppgaven ligner på den foregående. Vi benytter samme substitusjon. Vi setter og inn for $x^2 = u-1$. Integralet er lik

$$\int_1^5 (u-1)^2 u^{-1/2}\,du = \int_1^5 (u^{3/2} - 2u^{1/2} + u^{-1/2})\,du =$$

$$\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{4}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2}\ |_1^5 = \frac{2}{5}5^{5/2} - \frac{4}{3}5^{3/2} + 2\cdot 5^{1/2} - \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2\right) =$$

$$(10 - 20/3 + 2)\sqrt{5} - \frac{16}{15} = (16/3)\sqrt{5} - 16/15 = \underline{\frac{16(5\sqrt{5}-1)}{15}}$$

c)

$$\int_{-2}^2 \sin(x^3) + \cos^2(x)\,dx$$

Hint: Integralet fra $-a$ til a av en odde (integrerbar) funksjon er 0.

LF: Siden $\sin(x^3)$ er en odde (integrerbar) funksjon så er integralet $\int_{-2}^2 \sin(x^3)\,dx = 0$. Integralet vårt er derfor lik

$$\int_{-2}^2 \cos^2(x)\,dx = \int_{-2}^2 \frac{\cos(2x)+1}{2}\,dx = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}\ |_{-2}^2 = \underline{\frac{\sin(4)}{2} + 2}$$

Her har vi benyttet en trigonometrisk likhet for å skrive om integranden slik at det blir lettere å finne en antiderivert.

d)

$$\int_0^2 \frac{2x-7}{x^2-9}\,dx$$

LF: Vi benytter delbrøkoppspalting og får

$$\frac{2x-7}{x^2-9} = \frac{-1/6}{x-3} + \frac{13/6}{x+3}$$

Det ubestemte integralet er lik

$$\frac{1}{6}\int_0^2 \frac{-1}{x-3} + \frac{13}{x+3}\,dx = \underline{\frac{1}{6}\left(-\ln|x-3| + 13\ln|x+3|\right) + C}$$

3

La a være et reelt tall ulik null. Vis følgende

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \frac{|a|}{a} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int x \sin(ax)\, dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a} + C$$

Dette er noen av integralene som står opplistet i permen bak i boken.
LF:
Vi benytter substitusjonen $u = x/a$. Da er $dx = a\, du$ og

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-u^2}}$$

Siden $\sqrt{a^2} = |a|$ får vi

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \int \frac{1}{|a|\sqrt{1-u^2}}\, a\, du = \frac{a}{|a|} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Vi får nå resultatet siden $\frac{|a|}{a} = \frac{a}{|a|}$.

Vi benytter delvis integrasjon for det andre integralet. La $u' = \sin(a)$ og $v = x$, og velg den antideriverte $u = -\cos(ax)/a$. Den deriverte til v er bare lik 1.

$$\int x\sin(ax)\, dx = x \cdot (-\cos(ax)/a) - \int 1 \cdot (-\cos(ax)/a)\, dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a} + C$$

4

1. Finn volumet til legemet som fremkommer ved å rotere regionen mellom x-aksen og grafen til

   $$2 - \sqrt{1-x^2}$$

   fra $x = 0$ til $x = 1$, om y-aksen.

   Hint: Hvordan ser legemet ut?

   LF: Legemet ser ut som en sylinder med radius 1 og høyde 2 hvor det er freset ut en halvkule med radius 1 i toppen. Volumet er derfor lik

   $$\pi \cdot 1^2 \cdot 2 - 2\pi/3 = \underline{4\pi/3}$$

   Vi kan og benytte skivemetoden til å finne volumet. Da får vi at volume er

   $$\int_0^1 2\pi x \cdot (2 - \sqrt{1-x^2})\, dx = 2\pi(x^2 + (1-x^2)^{3/2}/3 \,|_0^1) = 4\pi/3$$

2. Finn buelegden til kurven gitt ved $g(x) = e^x$ fra $x = 0$ til $x = 1$. Er svaret du får rimelig? Bruk gjerne numerisk integrasjon.

   Buelengden er lik

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

   Den rette linjen fra start til slutt-punkt har lengde

$$\sqrt{1 + (\sqrt{e^2 + 1} - \sqrt{2})^2} = 1.78797016.$$

   Dette gir et nedre estimat for buelengden.

   Nummerisk integrasjon gir (her er Simpsons metode benytta med 10000 delintervaller

$$\underline{L \approx 2.0034971116273}.$$

5

Beskriv alle løsningene til differensiallikningssystemene nedenfor.

a)

$$y' - 3y = \cos(x) \qquad y(0) = 1$$

LF : Dette er en første ordens differensiallikning med konstante koeffisienter. Likningen er av orden 1 og det er en randbetingelse.

De homogene løsningene (løsningene til likningen $y' - 3y = 0$) er $y = Ae^{3x}$ for konstanter A. Vi finner nå en partikulær løsning. Det vil være realdelen av en løsning til $y' - 3y = e^{ix}$. Vi forsøker med en funksjon på formen $y = Ke^{ix}$. Setter vi den inn får vi

$$(i - 3)Ke^{ix} = e^{ix}$$

Dette gir

$$K = \frac{1}{i - 3} = \frac{i + 3}{-10} = -\frac{i + 3}{10}$$

En partikulær løsning er derfor

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{i + 3}{10}(\cos(x) + i\sin(x))\right) = (-3\cos(x) + \sin(x))/10$$

Løsnignene er derfor på formen

$$y(x) = Ae^{3x} + (-3\cos(x) + \sin(x))/10$$

Vi løser nå randverdiproblemet. Kravet $y(0) = 1$ gir $A - 3/10 = 1$, så $A = 13/10$. Løsningen til randverdiproblemet er

$$\underline{y(x) = (13e^{3x} + -3\cos(x) + \sin(x))/10}$$

b)

$$y'(2x-3) = 4x^2y^2 \qquad y(2) = 1/10$$

LF: Dette er en separabel differensiallikning. Vi samler faktorer som er funksjoner bare av y på venstre side og faktorer som er funksjoner av x på høyre side av likhetstegnet.

$$\int \frac{y'}{y^2}\,dx = \int \frac{4x^2}{2x-3}\,dx$$

For å gjøre det enklere å løse integralet til høyre utfører vi polynomdivisjon

$$\frac{4x^2}{2x-3} = 2x+3+\frac{9}{2x-3}$$

Vi finner de antideriverte og får

$$-\frac{1}{y} = x^2+3x+4.5\ln|2x-3|+C$$

Vi løser randverdiproblemet: Setter vi inn $x=2$ og $y=1/10$ får vi

$$-10 = 4+6+4.5\cdot\ln 1+C = 10+C,$$

så $C=-20$. Løsningen er

$$y(x) = \frac{-1}{x^2+3x+4.5\ln|2x-3|-20}$$

c)

$$y'+3x^5 = 2x^2y \qquad y(0) = 2$$

Dette er en førsteordens linær differensiallikning. Vi benytter integrerende faktorer

$$(y'-2x^2y)e^{-2x^3/3} = (y\cdot e^{-2x^3/3})' = -3x^5e^{-2x^3/3}$$

Vi integrerer og får

$$y\cdot e^{-2x^3/3} = \int -3x^5e^{-2x^3/3}\,dx = \int -3(-3u/2)(-1/2)e^u\,du = -9/4(ue^u-e^u)+C$$

hvor vi har benyttet substitusjonen $u=-2x^3/3$. Den deriverte til u er lik $-2x^2$. Dette gir

$$y = e^{2x^3/3}(-9/4((-2x^3/3)e^{-2x^3/3}-e^{-2x^3/3})+C) = \underline{3x^3/2+9/4+Ce^{2x^3/3}}$$

d)

$$y'' - 5y' + 8y - 4 = 0$$

En partikulær løsning er $y = 1/2$. Vi finner nå de homogenen løsningene ved å anta at $y = e^{rx}$. Vi får da at

$$(r^2 - 5r + 8)e^{rx} = 0$$

Løsningene er

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 32}}{2} = \frac{5 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

De homogene løsningene er derfor $e^{5x/2}(A\cos(\sqrt{7}x/2) + B\cos(\sqrt{7}x/2))$. Vi kombinerer dette med den partikulære løsningen og finner løsningenen til differensiallikningen

$$y(x) = \underline{1/2 + e^{5x/2}(A\cos(\sqrt{7}x/2) + B\cos(\sqrt{7}x/2))}$$

Benytt Eulers metode til å finne estimat til løsningen av randverdiproblemene. Forsøk med forskjellig steglengder og undersøk hvor nøyktig estimatene blir.

Dere kan benyte matlab programmet Eulerm.m til å finne tilnærma løsning til differensiallikningenen.

6

Vi skal studere bevegelsen til et objekt som faller i et konstant gravitasjonsfelt når vi tar hensyn til luftmotstanden. Vi velger positiv retning til å være nedover (i samme retning som gravitasjonskraften).

Anta at luftmotstand er proporsjonal til kvadratet til farten. La proporsjonalitetskonstanten til luftmotstanden for vårt objekt være l. Luftmotstanden er da lik $-lv^2$, hvor $v(t)$ er farten ved tiden t.

Vi antar at legemet slippes fra en veldig stor høyde så det tar en stund før det treffer bakken.

1. Vis at farten tilfredstiller differensiallikningen

$$mv' = mg - lv^2$$

   hvor m er massen og g er gravitasjonskonstanten.

   Vis at farten etter hvert vil stabilisere seg og nærme seg $V_0 = \sqrt{mg/l}$.

2. Løs differensiallikningen for farten $v(t)$. Finn løsningen som tilfredstiller initialkravet $v(0) = 0$. Dette vil si at legemet slippes og ikke kastes i tiden $t = 0$.

3. Hvor lang tid tar det fra et legeme slippes til de når 90% av farten V_0? (Vi antar dette skjer før legemet når bakken!)

4. Finn et uttrykk for distansen legemet har falt fra tiden $t = 0$ til tiden T. Vi antar også her at $v(0) = 0$. (Og selvsagt at legemet ikke har truffet bakken ved tiden T.)

Hvis det er behov for hjelp kan dere sjekke forelesningen 18. april 2013 på hjemmesiden til forkurs matematikk 2013.

LF: Se notatene for løsningsforslag. Notatene heter “Fall med luftmotstand” og ligger under uke 18.

7

La $k(x)$ være en funksjon med komplekse verdier. Anta $f(x)$ er en løsning til en lineær differensiallikning på formen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = k(x)$$

hvor p og q er reelle funksjoner og $k(x)$ er en kompleks funksjon.

Vis at da er realdelen $\mathrm{Re}\, f(x)$ av $f(x)$ en løsning til differensiallikningen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \mathrm{Re}\, k(x)$$

og imaginærdelen $\mathrm{Im}\, f(x)$ av $f(x)$ en løsning til differensiallikningen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \mathrm{Im}\, k(x)$$

Benytt dette til å finne en løsning til differensiallikningen

$$y'' - 2y' + 4y = \sin(3x)$$

Start gjerne med å finne en løsning til differensiallikningen

$$y'' - 2y' + 4y = -ie^{3ix}$$

på formen Ke^{3ix}, for en kompleks konstant K.

Finn deretter alle løsningene til differensiallikningen.

LF: Realdelen og imaginær delen av $y'' + p(x)y' + q(x)y$ er henholdsvis

$$(\mathrm{Re}\, y)'' + p(x)(\mathrm{Re}\, y)' + q(x)\mathrm{Re}\, y$$

og

$$(\mathrm{Im}\, y)'' + p(x)(\mathrm{Im}\, y)' + q(x)\mathrm{Im}\, y$$

Disse er lik henhodsvis $\mathrm{Re}\, k(x)$ og $\mathrm{Im}\, k(x)$.

Vi benytter denne teknikken til å løse differensiallikningen oppgitt. Anta at $y = e^{i3x}$. Setter vi denne funksjonen inn i den nederste differensiallikningen får vi

$$(-9 - 6i + 4)Ke^{i3x} = -ie^{i3x}$$

Dette gir at

$$K = \frac{-i}{-5-6i} = \frac{6+5i}{61}.$$

En løsnig er derfor lik

$$\mathrm{Re}\left(\frac{6+5i}{61}(\cos(3x) + i\sin(3x))\right) = \underline{(6\cos(3x) - 5\sin(3x))/61}$$

8

I denne oppgaven skal vi se på svingning med demping. Vi studerer annenordens lineære differensiallikninger med utgangspunkt i et mekanisk svingesystem med demping. Anta at kraften fjæren trekker inn mot jamvektsposisjonen er proporsjonal til avstanden fra jamvektsposisjonen og at dempningen er proporsjonal til farten (med en kraft i motstatt retning av farten). La proporsjonalitetskonstantene være henholdsvis Ω^2 og K. Fra antakelsene er både K og Ω^2 ikke-negative. Vi velger å la Ω også være ikke-negativ. Massen til objektet festet til fjæren er m. Vi har da fra Newtons andre lov at

$$my'' = -Ky' - \Omega^2 y$$

Vi deler med m på begge sider og får

$$y'' + ky' + \omega^2 y = 0$$

hvor $k = K/m \geq 0$ og $\omega = \Omega/\sqrt{m}$.

1. Løs den homogene differensiallikningen

$$y'' + ky' + \omega^2 y = 0$$

hvor $k \geq 0$ og $\omega \geq 0$.

Det er naturlig å se på følgende tre forskjellige tilfellene hver for seg:

Hvis $k^2 - 4\omega^2 > 0$ kalles løsningene overdempa

Hvis $k^2 - 4\omega^2 = 0$ kalles løsningene kritisk dempa.

Hvis $k^2 - 4\omega^2 < 0$ kalles løsningene underdempa.

LF: Vi antar at en løsning er på formen e^{rx} og setter inn:

$$(r^2 + kr + \omega^2)e^{rx} = 0$$

Løsningene er

$$r = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4\omega^2}}{2}$$

De er tre tilfeller:

Hvis $k^2 - 4\omega^2 > 0$, da er det to forskjellige reelle løsninger:

$$e^{-kx/2}(Ae^{\sqrt{k^2/4-\omega^2}x} + Be^{-\sqrt{k^2/4-\omega^2}x})$$

Slike løsninger kalles overdempa. Her er dempingen k så stor at systemet ikke klarer å svinge frem og tilbake flere ganger.

Hvis $k^2 - 4\omega^2 < 0$, da er løsningene

$$e^{-kx/2}(A\cos(\sqrt{\omega^2 - k^2/4}x) + B\sin(\sqrt{\omega^2 - k^2/4}x)$$

Slike løsninger kalles underdempa.

I overgangen mellom de to tilfellene, hvor $k^2 = 4\omega^2$ er det bare en rot. Løsningene er

$$e^{-kx/2}(Ax + B).$$

Dette er lineær kombinasjoner av løsningen $e^{-kx/2}$ og løsningen $xe^{-kx/2}$. Denne løsningen kalles kritisk dempa. Den oppfører seg mest som en overdempa løsningen.

2. Finn løsningen uttrykt ved k og ω når initialverdiene er $y(0) = 3$ og $y'(0) = 0$.

   Vi setter inn initialveridene og løser for parametrene A og B ovenfor.

   Hvis $k^2 - 4\omega^2 > 0$, da må

   $$A + B = 3 \quad \text{og} \quad A(-k/2 + \sqrt{k^2/4 - \omega^2}) + B(-k/2 - \sqrt{k^2/4 - \omega^2}) = 0$$

   Dette gir

   $$e^{-kx/2}\left(3/2 + \frac{k}{4\sqrt{k^2/4 - \omega^2}}\right)e^{\sqrt{k^2/4-\omega^2}x} +$$

   $$\left(3/2 - \frac{k}{4\sqrt{k^2/4 - \omega^2}}\right)e^{-\sqrt{k^2/4-\omega^2}x})$$

   Hvis $k^2 - 4\omega^2 < 0$, da må $A = 3$ og $-kA/2 + B\sqrt{k^2/4 - \omega^2} = 0$. Dette gir løsningen

   $$y = e^{-kx/2}(3\cos(\sqrt{\omega^2 - k^2/4}x) + 3k/(2\sqrt{\omega^2 - k^2/4})\sin(\sqrt{\omega^2 - k^2/4}x))$$

   Til sist hvis $k^2 = 4\omega^2$ da må $B = 3$ og $-kB/2 + A = 0$. Løsningen er derfor

   $$3e^{-kx/2}(kx/2 + 1).$$

3. Hvis systemet er underdempa så vil det svinge frem og tilbake mens amplituden (utslagene) blir mindre og mindre. Løsningen er et produkt av en avtagende eksponentialfunksjon og en periodisk funksjon. Hva er perioden til den periodiske funksjonen? Er den større eller mindre enn $2\pi/\omega$? Forklar hvorfor dette er rimelig.

   Hvis systemet er kritisk dempa eller overdempa da vil objektet bli så kraftig dempa at det ikke klarer svinge frem og tilbake flere ganger. Vis at for generelle initialbetingelser så kan objektet svinge maksimalt en eneste gang (endre retning, som vil si at y' skifter fortegn).

   LF: Perioden er

   $$\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - k^2/4}}$$

   dette er større enn $2\pi/\omega$, så perioden er lengre. Det er rimelig, siden dempningen bidrar til å bremse ned bevegelsene.

Hvis en kontinuerlig funksjon skifter fortegn n ganger så har den minst n forskjellige null-punkt. Det er derfor tilstrekkelig å sjekke at y' har maksimalt ett nullpunkt i det kritiske og det dempa tilfellet. Den deriverte av hver av løsningsfunksjonene er igjen en funksjon på samme form men med nye verdier for parametrene A og B. Funksjonen $e^{-kx/2}(Ax+B)$ har opplagt maksimalt en rot. Det har også funksjonen

$$e^{-kx/2+\sqrt{k^2/4-\omega^2}x}(A+Be^{-2\sqrt{k^2/4-\omega^2}x}).$$

Vi konkluderer med at i tilfelle med overdempa og kritisk dempa løsning vil løsningene snu fra å stige til å synke, eller motsatt, maksimalt én gang.

4. Sjekk "Resonanse og demping" som ligger under materiell på geogebra.org. Eksperimenter gjerne ved å justere på parametrene. Forsøk å forstå hvorfor systemet oppfører seg slik det gjør. For eksempel hvorfor vil den eksterne svingning ha liten invirkning når c er veldig stor i forhold til $\sqrt{q}$? (Notasjonen basert på det som er bruk i den interaktive modellen.) Sjekk gjerne tilhørende pdf-fil med utregningene som er benyttet for å lage til den interaktive modellen. De ligger på siden til kurset.

   Eg har ikkje lagt inn en beskrivelse av hva som skjer hvis dempningen er 0 og vi har resonanse. Regn ut dette tilfellet selv. Løs likningen

$$y'' + \omega^2 y = \sin(\omega x)$$

   Forklar hvordan løsningene oppfører seg når x øker.

   Hint: Undersøk løsninger på formen $kx\cos(\omega x)$, for en konstant k.

   LF: Vi forsøker med $y(x) = kx\cos(\omega x)$. Da får vi

$$k(-\omega^2 x\cos(\omega x) - 2\omega\sin(\omega x) + \omega^2 x\cos(\omega x) = -2k\omega\sin(\omega x) = \sin(\omega x)$$

   En løsning er derfor

$$y(x) = \frac{-x}{2}\cos(\omega x)$$

   Dette beskriver en svingelbevegelse hvor de maksimale utslagene vokser proporsjonalt med x.

9

Sett opp en differensiallikning for kurver gitt ved en funksjon $y(x)$ med følgende egenskaper: Kvadratet av stigningstallet til kurven i punktet $(x, y(x))$ er lik stigningstallet til linjen som går gjennom origo og punktet $(x, y(x))$.

Løs differensiallikningen og finn løsningene.

Betingelsene til kurven sier at

$$(y')^2 = \frac{y}{x}.$$

Dette er en separabel differensiallikning. Vi separerer variablene og integrerer

$$\int \frac{y'}{\sqrt{y}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + c$$

Løsningene er derfor på formen

$$y(x) = \underline{(\sqrt{x} + C)^2}$$

for konstanter C.

Her er noen oppgaver for de som vil ha litt ekstra å bryne seg på.

10

Finn de ubestemte integralene

a)

$$\int \frac{\ln(x+3)}{x^2}\,dx$$

b)

$$\int \cos^3(2x-1)\,dx$$

c)

$$\int x(x^4-1)^3\,dx$$

d)

$$\int e^{2x}\sin(3x)\,dx$$

11

Vi skal nå vise at vi fra funksjonsverdiene i tre utvalgte punkter kan finne integralet til et tredjegradspolynom eksakt.

La p være et tredjegradspolynom (eller et polynom av lavere grad). Vis at da er

$$\int_a^b p(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(p(a) + 4p\left(\frac{b+a}{2}\right) + p(b)\right)$$

Hint: Ved å benytte linearitet er det tilstrekkelig å sjekke resultatet for henholdsvis $1, x, x^2$ og x^3. (Et smartere argument finner dere i forelesningsnotatene til matematikk forkurs 25. april 2013.)

Hvis vi i stede for å benytte trapesmetoden

$$\frac{(b-a)\,(p(a)+p(b))}{2}$$

heller benytter estimatet ovenfor for hver av delintervallene får vi typisk et mye bedre numerisk estimat for et integral enn det vi får ved å benytte trapesmetoden. Denne metoden for å estimere bestemte integraler kalles for *Simpsons metode.*

Vi deler en intervall $[a,b]$ inn i $2n$ intervaller. En tilnærming til integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ er

$$S_n = (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))\,\frac{b-a}{6n}$$

hvor $x_i = a + (b-a)i/2n$.

Her er vektingen som vi benytter på de $2n+1$ funksjonsverdiene:

$$1\ 4\ 2\ 4\ 2\ 4\ 2 \ldots 2\ 4\ 2\ 4\ 1$$

Vektingen med 2 forekommer fordi alle endepunkter i de doble intervallene, bortsett fra det aller første og det aller siste, forekommer to ganger.

Så lenge den fjerde deriverte ikke er for stor gir dette et svært godt estimat for integralet. Feilen er begrenset av

$$\frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$$

(Siden Simpsons metode gir eksakt resultat for Taylor polynomet til f av orden 3, i hver dobbel intervall hvor vi gjør estimater, så vil feillen i hver av de doble delintervallene være basert på et estimat av den fjerde deriverte i delintervallet. Vi utelater detaljene.)

Det er lagt ut en m-fil hvor Simpsons metode er implementert sammen med trapesmetoden. Resultatene blir fremstilt som to kolonner. Radene nedover har er estimatet med 10^k delintervaller hvor k er radenummeret. Estimat basert på trapesmetoden er første kolonne og estimat basert på Simpsons metode er andre kolonne.

12

Med følgende integraler oppleves kanskje numerisk integrasjon som ikke særlig vellfungerende. Hva er det som skjer? Finnes integralene? Hva kan dere gjøre for å forsøke å finne integralene mer nøyaktig?

1. $$\int_1^{10^6} \frac{1}{x^2}\, dx$$

2. $$\int_0^6 \frac{1}{x-\pi}\, dx$$

3. $$\int_0^{100} \frac{\sin(\pi x^2)}{x+1}\, dx$$

13

1. Anta at $f(0) = 0$ og $n \leq f'(a) \leq N$ for alle a mellom 0 og x. Vis at da må $nx \leq f(x) \leq Nx$ for alle $x \geq 0$ og $Nx \leq f(x) \leq nx$ for alle $x \leq 0$.

2. Utvid resultatet ovenfor til å vise dette hvor begrensningene n og N er funksjoner av x:

   Hvis $n(x) \leq f'(a) \leq N(x)$ for alle a mellom 0 og x. Da må

   $$\int_0^x n(x)\,dx \leq f(x) \leq \int_0^x N(x)\,dx$$

   for alle $x \geq 0$ og

   $$\int_0^x N(x)\,dx \leq f(x) \leq \int_0^x n(x)\,dx$$

   for alle $x \leq 0$.

3. Benytt dette resultatet gjentatte ganger til å vise formelen for feilleddet til et Taylor polynom.

   Anta at $f(x)$ er $n = 1$ ganger kontinuerlig deriverbar. Da er avviket mellom $f(x)$ og Taylor polynomet av orden n, $P_n(x)$, for hver verdi av x lik

   $$\frac{x^{n+1} f^{n+1}(a)}{(n+1)!}$$

   for en verdi a mellom 0 og x (som avhenger av x).

   Hint: Vis først at for positive x så er verdien $f(x) - P_n(x)$ mellom

   $$\frac{x^{n+1} min_z f^{n+1}(z)}{(n+1)!}$$

   og

   $$\frac{x^{n+1} max_z f^{n+1}(z)}{(n+1)!}$$

   hvor $min_z f^{n+1}(z)$ og $max_z f^{n+1}(z)$ er minste og største verdi til $f^{n+1}(z)$ på intervallet mellom 0 og x. Disse verdiene eksisterer ved ekstremalverdisetningen siden vi har antatt av $f^{n+1}(x)$ er kontinuerlig. Et tilsvarende resultat, hvor vi snur ulikhetene når n er et partall, er gyldig for negative x.

   Bruk skjæringssetningen til å fullføre resultatet.

4. Forsøk å vis at feilleddet til numerisk integrasjon basert på trapesmetoden er lik

   $$\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

   hvor M_2 er en øvre grense for $|f''(x)|$ på intervallet.