Innlevering	DAFE ELFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 3
Innleveringsfrist	Torsdag 26. mars 2015
Antall oppgaver:	$10 + 3$

1

For hver av matrisene nedenfor finn den ekvivalente matrisen som er på redusert trappeform. Gjør mellomregningene oversiktlige. Det blir da lettere å søke etter feil og å benytte utregningene i senere oppgaver, for eksempel til å finne determinanten av de kvadratiske matrisene. Dere kan sjekke det dere kommer frem til ved å benytte kommandoen rref i matlab.

a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 2i & -i \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 \\ 6 & 17 & 0 \\ 5 & -15 & 25 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 & 19 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e)

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

2

Regn ut determinantene til de kvadratiske matrisene i oppgave 1. Finn også inversmatrisen til de matrisene som har inversmatriser. Vis hva du gjør. Hva blir determinanten til matrisen i 1c) hvis dere regner den ut i matlab? Hva er det som skjer her?

3

Beskriv alle løsningene til likningssystemene nedenfor.

a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

for parametre a og b. (Uttrykk x og y som funksjoner av a og b.)

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 2i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

(Her er i et komplekst tall med $i^2 = -1$)

c)

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 \\ 6 & 17 & 0 \\ 5 & -15 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{bmatrix}$$

for alle mulige verdier av parameteren a.

d)

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 & 19 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4

En lineær transformasjon $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ har egenskapen

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestem standardmatrisa til T.

5

Regn ut determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

uttrykt ved de tre parametrene a, b og c.

6

La M være en $n \times n$-matrise og la k være en skalar. Skaleringen av matrisen kM er definert ved at alle elementene i M skaleres med k. Undersøk om følgnde påstand er riktig (eksperimenter i matlab?)

$$\det(kM) = k^n \det(M)$$

Forklar hvorfor det er sant eller gi et moteksempel som viser at dette ikkje alltid er sant.

7

1. Benytt den rekursive definisjonen av determinanter til å regne ut determinanten til

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 20 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

samt bestem inversmatrisen ved å finne den adjungerte til A

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(A)}{\det(A)}$$

2. Forklar følgende resultat: Anta A er en inverterbar matrise slik at alle elmentene i A er heltall. Da vil $\det(A)$ være et heltall ulik null. Videre er alle elementene i A^{-1} rasjonale tall som kan skrives som en brøk hvor nevneren deler $\det(A)$. (Med andre ord $\det(A)$ ganger hvert element i A^{-1} er et heltall.)

8

Avgjør om hvert av de følgende sett av vektorer er linært uavhengige. Hvis ikke uttrykk minst en av vektorene fra de andre vektorene.

1.

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \\ -15 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

9

I denne oppgaven skal dere regne ut resultatresistansen til kretsen nederst på side 5 i forelesningene fra 4. mars 2015. (Se gjerne på hvordan eksempelet på side 6 i notatene er løst ved bruk av Kramers regel.) Finn resultatresistansen når motstanden i midten er et potensiometer som kan ta alle mulige verdier større enn eller lik 0. For å teste resulatet deres kan dere undersøke at dere får verdiene vi regnet ut på forelesning i tilfellet $R = 0$ og i tilfellet $R \to \infty$.

10

Vi ser litt på stabiliteten til løsningene i et likningssytem. Små endringer i et likningssystem kan få store konsekvenser for løsningene. Her er et enkelt eksempel

$$\begin{bmatrix} 1.000001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1.000001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000001 \\ 1 \end{bmatrix}$$

har løsning hennholdsvis

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En relativ endring på en milliontedel i ene tallet i likningssystemet får store konsekvenser for løsningenen. I dette tilfellet er determinanten til koeffisientmatrisen bare 10^{-6}.

Undersøk stabiliteten til likningssytemet

$$\begin{bmatrix} 2.35643 & 1.34252 \\ 5.86695 & 3.34255 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.69895 \\ 9.20949 \end{bmatrix}$$

hvis vektoren $[3.69895, 9.20949]$ endres litt. Prøv gjerne å gjerne å gjøre små endringer i koeffisientmatrisen også.

Hva observerer du?

En m-fil er tilgjengelig.

De tre siste oppgaven er for dem som har behov for litt ekstra å gjøre. Dere trenger ikke levere besvarelsen av disse tre siste oppgaven.

11

Bruk matlab til å regne skrive opp en 10×10 matrise M hvor element $M_{i,j}$ er lik 0 når $i = j$ (diagonalen) og ellers er $M_{i,j} = 1/(i - j)$.

Bruk matlab til å skrive opp matrisen (du kan for eksempel benytte for-løkker). Bruk matlab til å regne ut determinanten og inversmatrisen.

12

Reelle polynomer av grad n eller mindre, for et positivt heltall n, er et vektorrom over de relle tall. En basis er $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Det er slik fordi alle slike polynomer kan entydig skrives som en lineær kombinasjon av disse basiselementene

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$$

1. Hva er dimensjonen til dette vektorrommet?

2. Derivasjon er en lineær transformasjon fra dette vektorrommet til seg selv. Beskriv denne lineære transformasjonen som en matrise ved å benytte basisen ovenfor.

   Hvis du synes dette er vanskelig å gjøre for generelle n så gjør det bare for $n = 5$.

3. Hva er determinanten til derivasjonstransformasjonen? Har derivasjonstransformasjonen en inversmatrise?

4. Hva er resultatet av å anvende derivasjonsoperatoren to ganger? Utfør matrisemultiplikasjonen og se om den resulterende linære transformasjonen er det du forventer. (Hva forventer du?)

5. Er transformasjonen som sender polynom $p(x)$ til $2p(x) - x \cdot p'(x)$ en lineær transformasjon fra vektorrommet til seg selv?

   Hvis ja, beskrive transformasjonen på matriseform med basisen ovenfor og finn inversmatrisen, hvis den finnes. (Avgrens deg til $n = 5$ hvis det generelle tilfellet er vanskelig.)

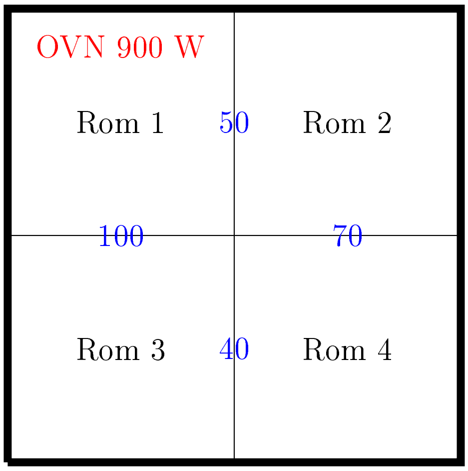
13

Denne oppgaven er en enkel utgave av eksempel 9.1.38 i boken. (Oppgaven er gitt i Matte 1000 tidligere.)

En leilighet har fire rom. Det er bare en leilighet i hver etasje. Vi ser bort fra varmetap til leiligheten over og under vår leilighet. Det står en ovn som avgir 900 W i rom 1. Anta at temperaturen ute er $-5°C$ og at varmetapet utover, for hver av de fire rommene er proporsjonalt til temperaturdifferansen med varmeoverføringskoeffisient $10W/°C$.

Mellom rommene er det ikke så godt isolert: Mellom rom 1 og 2 er varmeoverføringskoeffisienten $50W/°C$, mellom rom 1 og 3 er koeffisienten $100W/°C$, mellom rom 2 og 4 er koeffisienten $70W/°C$, mellom rom 3 og 4 er koeffisienten $40W/°C$. Temperaturen i rom 1 kan kalles T_1 etc.

Regn ut temperaturen i de fire rommene når temperaturen har stabilisert seg.



Hint: Sett opp et regnskap for varmetap for de fire rommene og løs likningsystemet. For eksempel for rom 3 er total varmetap lik 0 derfor må

$$10(T_{ute} - T_3) + 100(T_1 - T_3) + 40(T_4 - T_3) = 0.$$

(Vi tar ikke med enhetene.) Dette er det samme som

$$100T_1 + 0 \cdot T_2 - 150T_3 + 40T_4 = 50.$$

Det bør brukes regneverktøy for å løse oppgaven. Tenk over om svaret du får er rimelig. For eksempel hva er gjennomsnittstemperaturen til de fire rommene?