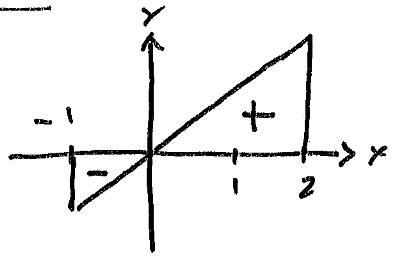
16. mars 2015

Integrasjon

Bestemte integral

$\int_a^b f(x)\,dx$ tall

(1)



$\int_{-1}^{2} x\,dx = 3$

arealet mellom x-aksen og grafen til $f(x)$ over x-aksen

$-($ — " — under x-aksen$)$

Ubestemt integral

$$\int \underset{\text{integrand}}{f(x)}\,dx = \underbrace{F(x) + \underset{\text{konstant}}{C}}_{\text{klasse av funksjoner}}$$

Klassen av alle funksjoner med derivert lik $f(x)$.

Bestemte og ubestemte integral er relatert ved fundamentalteoremet i kalkulus.

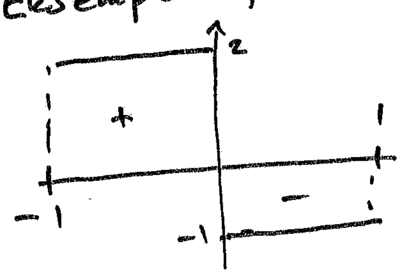
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad \text{når } f(x) \text{ er kontinuerlig}$$

(alle kontinuerlige funksjoner har en antiderivert)

Dette gir $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

$f(t)$ kontinuerlig og F en funksjon i $\int f(x)\,dx$.

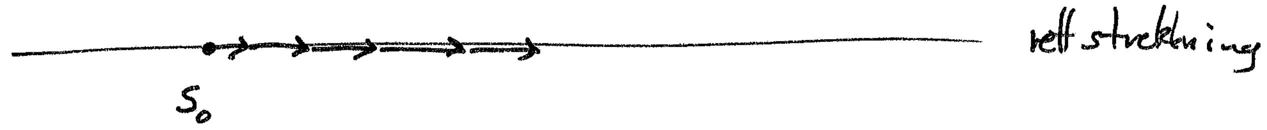
Eksempel på en funksjon som ikke har en antiderivert.



men $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1\cdot 2 - 1\cdot 1 = \underline{1}$

Fartfunksjon $V(t)$

②



possisjon $S(t)$ $\qquad \frac{d}{dt} S(t) = V(t)$.

$S(t)$ er bestemt av $V(t)$ og possisjonen i et gitt tidspunkt (for eksempel $S(0) = S_0$)

$S(t)$ er bestemt av $V(t)$ opp til å legge til en konstant.

$V(t) = 2t$

$S(t) = t^2 + C$

Hvis $S(0) = S_0$ så er $\underline{S(t) = t^2 + S_0}$

---

akselerasjon er lik $-g$ (gravitasjonskonstanten g) $\uparrow$

$a(t) = \frac{d}{dt} V(t)$

$V_0 = V(0)$

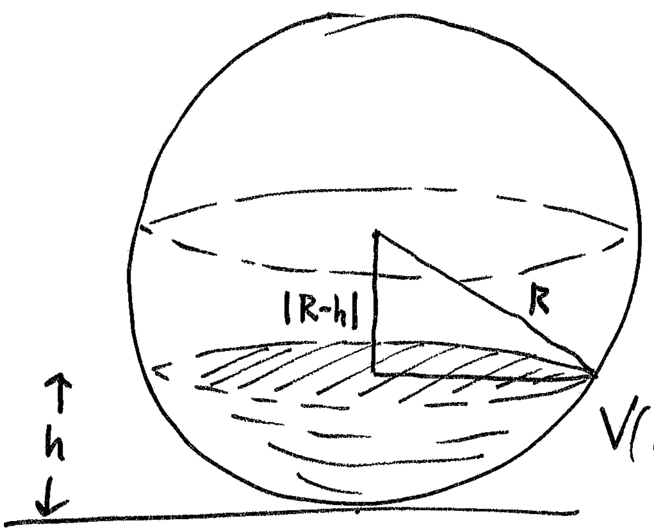
$V(t) = -g \cdot t + V_0$

$\frac{d}{dt} S(t) = V(t) = -gt + V_0$

$S_0 = S(0)$

$S(t) = \underline{-\frac{g}{2} t^2 + V_0 \cdot t + S_0}$

③



Kule med radius R

(oblig 2 #10)

V(h) volumet opp til høyde h $\quad 0 \le h \le 2R$

$$\frac{dV}{dh} = \text{tverrsnittarealet} = \pi\left(R^2 - (|R-h|)^2\right)$$

$$= \pi\left(R^2 - (R^2 - 2Rh + h^2)\right) = \pi(2Rh - h^2)$$

$$V(0) = 0 \quad \text{(randbetingelse)}$$

må være 0 siden $V(0) = 0$

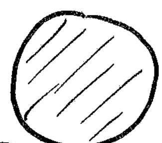
$$V(h) = \pi\left(R \cdot h^2 - \frac{h^3}{3}\right) + C$$

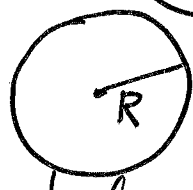
$$V(h) = \pi\left(Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right) = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$$

Volumet til hele kula er lik $V(2R)$ $\quad$ høyde $= 2R$

$$V_{kule} = V(2R) = \pi\underbrace{(2R)^2}_{4R^2}\underbrace{\left(R - \frac{2R}{3}\right)}_{\frac{1}{3}R} = \underline{\frac{4\pi}{3}R^3}$$

Vi utleder nå arealet til en sirkel (disk) ut fra omkretsen til en sirkel.

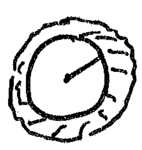




omkretsen er $\underline{2\pi R}$

$$\frac{dA(r)}{dr} = \text{omkretsen til en sirkel m. radius } r.$$

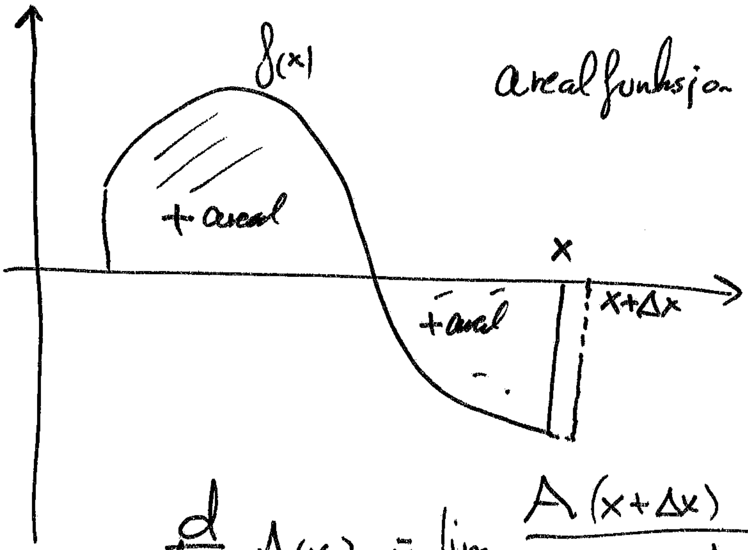
$$\frac{d}{dr}A(r) = 2\pi \cdot r \qquad A(0) = 0$$

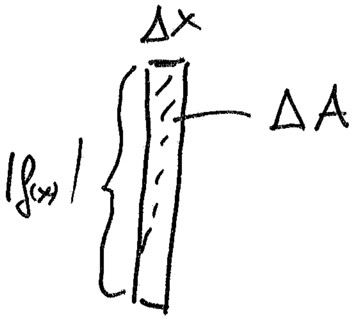
(ΔA )

$$\underline{A(r) = \pi r^2}$$

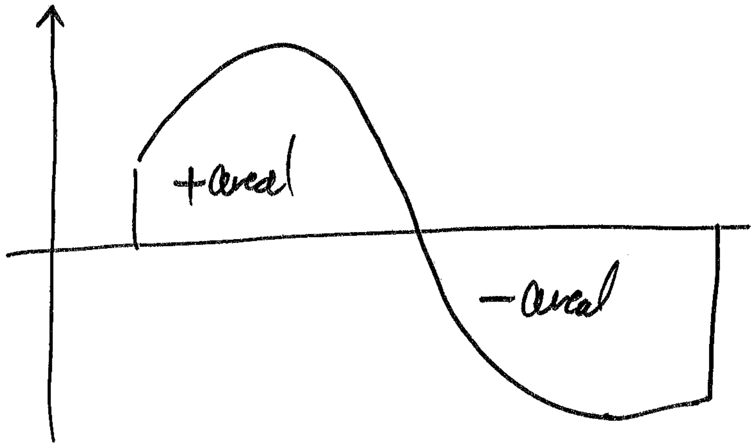
4

arealfunksjon $A(x)$





$$\frac{d}{dx} A(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = \underline{|f(x)|}$$



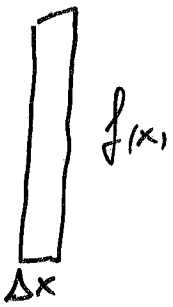
$A(x)$ = areal med fortegn

$$\underline{\frac{d}{dx} A(x) = f(x)}$$

$\Delta A(x)$

$\sim \Delta x \cdot f(x)$

(positivt $\Delta x > 0$)

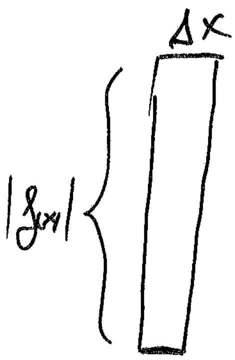


når $f(x) > 0$

$\Delta A(x)$

$\sim \Delta x \cdot f(x)$

(negativt $\Delta x > 0$)



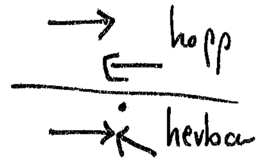
$f(x) < 0$

5

Antideriverte

En antiderivert til $f(x)$ er en funksjon $F(x)$ slik at $\frac{dF}{dx} = f(x)$.

Kontinuerlige funksjoner har antiderivert.
Funksjoner med hopp og hevbar diskontinuitet har ikke antiderivert.

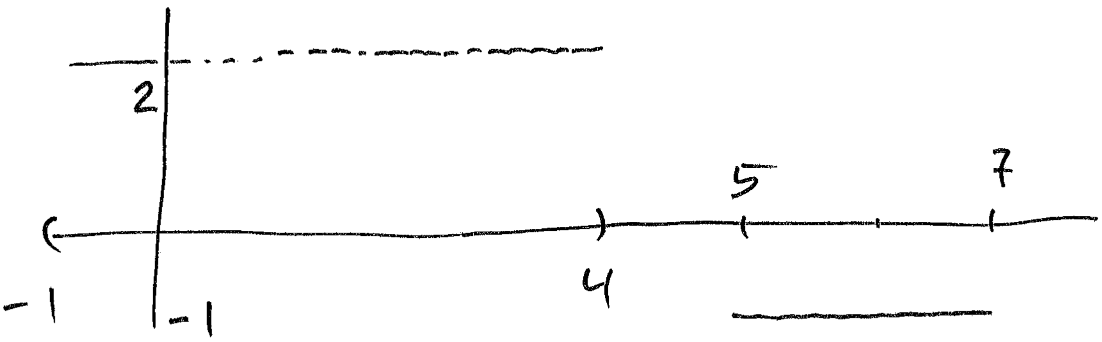


Eksempler: $(x^r)' = r x^{r-1}$

En antiderivert til x^r er $\frac{x^{r+1}}{r+1}$ $r \neq -1$

$r = -1$: en antiderivert til $\frac{1}{x}$ er $\ln|x|$ $(x \neq 0)$

Anta $\frac{d}{dx} F(x) \equiv 0$ identisk lik 0.



Da må $F(x)$ være konstant (på hver komponent av definisjonsmengden).
Dette følger fra middelverdisetningen.

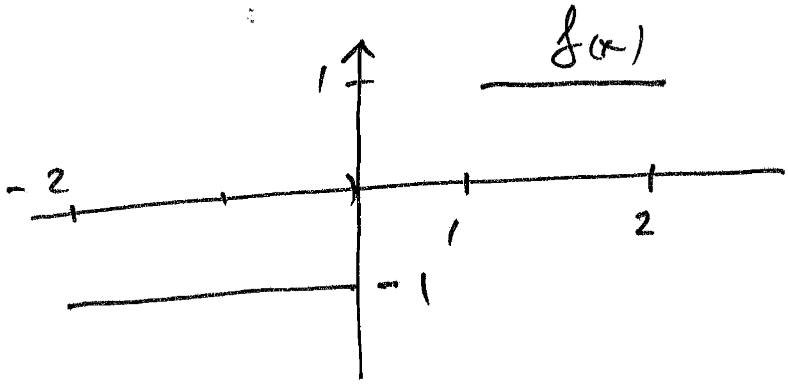
Hvis $F(x)$ og $G(x)$ er antiderivert til $f(x)$,

6 da finnes det en konstant C (på hver komponent av def. mengden) slik

$$G(x) = F(x) + C .$$

$$\frac{d}{dx}\left(F(x) - G(x)\right) = \frac{dF}{dx} - \frac{dG}{dx} = f(x) - f(x) = 0$$

så $F(x) - G(x) = C$.



Finn alle antiderivert til $f(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1 & 1 < x < 2 \\ -x + C_2 & -2 < x < 0 \end{cases}$$

Det ubestemte integralet til $f(x)$ er samlingen av alle antiderivert til $f(x)$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

en antiderivert

bestemt opp til en konstant for hver intervall/komponent i def. mengden til $f(x)$.

(7) $\int 1\,dx = x + c$ $\qquad$ $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \qquad r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\left(= \begin{cases} \ln(x) + c_1 & x > 0 \\ \ln(-x) + c_2 & x < 0 \end{cases} \right)$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{3/2} + c$$

$$= \frac{2x^{3/2}}{3} + c = \underline{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c}$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

Ubestemte integral er lineære:

(8)

$$* \int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$
$$= F(x) + G(x) + C$$

$$* \int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx \quad (+\text{ konst})$$

$$\left(\int 0 \cdot x\, dx = C \right.$$
$$\left. 0 \int x\, dx = 0\left(\frac{x^2}{2} + c\right) = 0 \right)$$

må legge til konstant

$$\int 2x - 3/x\, dx = 2\int x\, dx - 3\int \frac{1}{x}\, dx$$
$$= 2\left(\frac{x^2}{2}\right) - 3\ln|x| + C = \underline{x^2 - 3\ln|x| + c}$$

Integrasjonsteknikker

Delvis integrasjon (kommer fra produktregelen)

$$\int u' \cdot v\, dx = u \cdot v - \int u \cdot v'\, dx$$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

så $\int u' \cdot v + u \cdot v'\, dx = u \cdot v + c$

$$= \int u' \cdot v\, dx + \int u \cdot v'\, dx = u \cdot v + c$$

så $\int u' \cdot v\, dx = u \cdot v - \int u \cdot v'\, dx$

(9)

$$\int \overset{v}{x}\,\overbrace{\cos x}^{u'}\,dx \qquad u = \sin x$$

$$= \overset{v}{x}\cdot\overset{u}{\sin x} - \int \overset{v'}{1}\cdot\overbrace{\sin x}^{u}\,dx$$

$$= x\cdot\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x - (-\cos x) + c$$

$$= \underline{x\sin x + \cos x + c}$$

$$\int \overset{u'}{x}\,\overbrace{\ln|x|}^{v}\,dx \qquad u = x^2/2$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|x| - \int \overbrace{\frac{x^2}{2}}^{u}\cdot\overbrace{\frac{1}{x}}^{v'}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \underline{\frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}x^2 + c}$$

Vi sjekker svaret: $\left(\frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}x^2\right)'$

$$= x\ln|x| + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{4}2x$$

$$= x\ln|x| + \frac{\cancel{x}}{2} - \frac{x}{2} = x\ln|x| \checkmark$$

$$\int \ln|x|\,dx = \int \overset{u'}{1}\cdot\overset{v}{\ln|x|}\,dx \qquad u = x$$

$$= x\ln|x| - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \underline{x\ln|x| - x + c}$$

generelt

$$\int f(x)\,dx = x f(x) - \int x f'(x)\,dx$$