11.03.~~2015~~

Lineære transformasjoner

Standardmatrisen til rotasjon i planet (roterer en vinkel θ i positiv retning)

(1)

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{bmatrix} \cos\theta , & -\sin\theta \\ \sin\theta . & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotasjon 90° om x-aksen i rommet $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Rotasjon 90° om z-aksen i rommet $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(Rotasjon 90° om y-aksen (rotasjon -90° i xz-planet) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.)

Vi roterer først 90° om x-aksen og så 90° grader om z-aksen resultatet er da:

$\vec{e}_1$ sendes $\vec{e}_2$

$\vec{e}_2$ — $\vec{e}_3$

$\vec{e}_3$ — $\vec{e}_1$

Standardmatrisen til denne lin. transformasjonen er

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = BA$$

(Vi illustrerte dette ved å rotere et aksesystem i rommet)

Rotasjon 90° om x-aksen : $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$

Videre rotasjon 90° om z-aksen blir da

$$B(A\vec{x}) = \underline{B \cdot A} \cdot \vec{x}$$

(2)

Rotasjon 90° først om z-aksen så 90° om x-akse

har standardmatrise

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

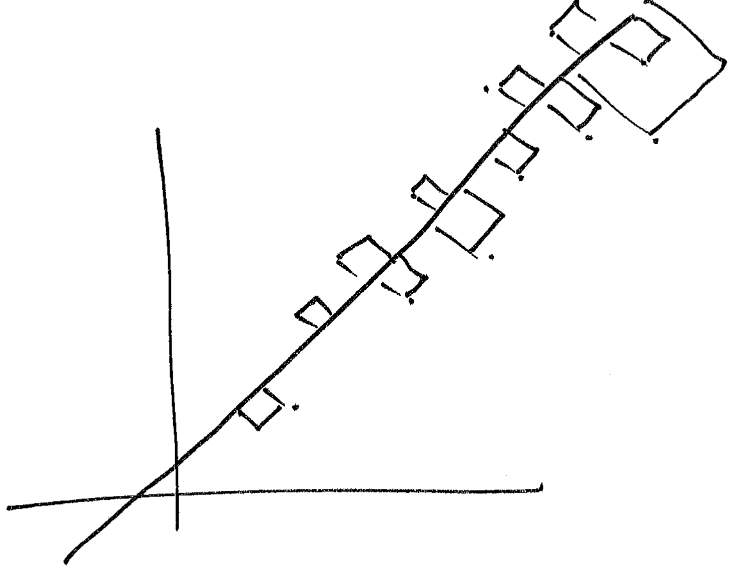
det vil si at $\vec{e}_1$ sendes til $\vec{e}_3$

$\vec{e}_2$ — $-\vec{e}_1$

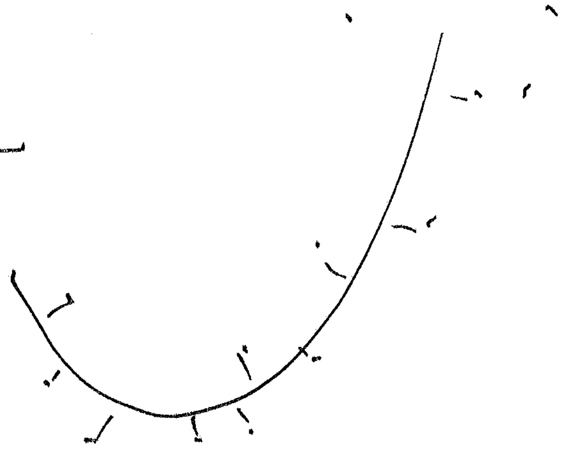
$\vec{e}_3$ — $-e_2$

Studer tabellene i boka 482–84 og 486–88.

③



$y = ax + b$



$ax^2 + bx + c$

Les gjerne 9.6 i boken.
Minste kvadraters metode.

Eksempel

(4) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineær transformasjon

$$T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix}$$

Finn standardmatrisen til T.

Den er $\left[T(\vec{e}_1),\ T(\vec{e}_2)\right]$

Vi uttrykker derfor $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$ ved hjelp av $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ (hvor vi kjenner verdien til T)

Vi ser at $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \vec{e}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

Derfor er $T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) - 2T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}-2\\0\\7\end{bmatrix}}$$

Vi har: $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Derfor er $T(\vec{e}_1) = T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2\\0\\7\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}3\\2\\-4\end{bmatrix}$$

Standardmatrisen er $\underline{\begin{bmatrix}3 & -2\\2 & 0\\-4 & 7\end{bmatrix}}$

(ikke eksamensrelevant, ⇓)

M_2 være alle 2×2 reelle matriser. Algebra

(5) $+$ 0-element inverselem.

$\times$ (ikkje kommutativt) $\mathbb{1}_n$ id. element

(resp. mult. add. 0, 1 etc)

$\mathbb{R} \subset M_2$ de reelle tall ligger inni denne algebrae.

$$r \mapsto r \cdot \mathbb{1}_2 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}.$$

$$r \cdot s \to \begin{bmatrix} rs & 0 \\ 0 & rs \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Vi vil nå vise at de komplekse tall $\mathbb{C}$ også ligger inni M_2.

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad -i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = i^T$$

$$i^2 = i \cdot i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1\, \mathbb{1}_2$$

$$z = a + bi = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

inni M_2

Komplekskonjugasjon svarer til transponering av matrise

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = \det\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

inversmatrisen til $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ er $\frac{1}{\det(\dots)}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$ som svarer til z^{-1}.

oppg. 3 a) aug. 2014 Eksamen

$$B^5 = B \cdot B \cdot B \cdot B \cdot B$$

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{bmatrix}$$

(Generelt har vi:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{bmatrix}$$)

b)

$$D \cdot D + D \cdot X = E^2 \cdot X + E^2 \cdot F$$

$$D \cdot X - E^2 \cdot X = E^2 F - D^2$$

$$(D - E^2) X = E^2 F - D^2$$

gange med $(D - E^2)^{-1}$ fra venstre

$$\underline{X = (D - E^2)^{-1} (E^2 F - D^2)}$$

(Til orientering:

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n = A^{-1} \cdot A$$

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} A \cdot X = A^{-1} B$$

$$1 \cdot X = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1} B .$$)

Eksamen august 2014

3 c)

$$A \quad \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ b \end{bmatrix}.$$

7

1) én løsning $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

$\det A = 2 \cdot a - 6a = -4a$.

én løsning presis når $a \neq 0$.

2)
3)

Ser nå på tilfellet der $\det A = 0$
$\Leftrightarrow a = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$2x_1 + 6x_2 = 4$$
$$0 = b$$

Vi har ingen løsning når $b \neq 0$.

Hvis $b = a = 0$ så er alle (x_1, x_2) slik

$2x_1 + 6x_2 = 4$ en løsning. Dette er en linje av løsninger.

Eksamen august 2014

4. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

(8) T er sammensetningen $T_2 \circ T_1$

hvor T_1 er skalering (av vektoren) med en faktor 2, og T_2 er rotasjon av vektoren $90°$ i positiv retning.

$T_1 \vec{x} = 2\vec{x}$ så standard matrisen til T_1 er $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

standard matrisen til rotasjonen er $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (her har eg satt $\theta = 90°$ i rotasjonsmatrisen $\begin{bmatrix} \cos\theta, & -\sin\theta \\ \sin(\theta), & \cos(\theta) \end{bmatrix}$)

standard matrisen til $T = T_2 \circ T_1$ er produktet av standard matrisene til hver av transformasjonene

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}}$$

Eksamen juni 2012

4(c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$

9

start med

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ -2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

bytter først rad 2 og 3, deretter rad 1 og 2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(\frac{1}{2}) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ 4 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \leftarrow \\ -1 \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right]$$

Derfor er $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$