28.01.2015

(1)

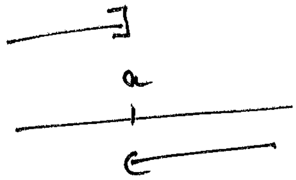
Derivasjon

Definisjon av den deriverte

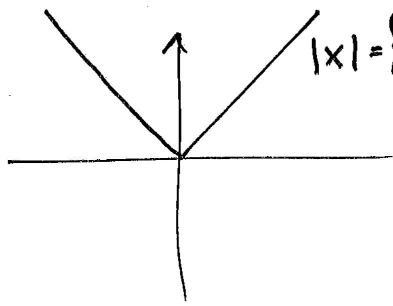
$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$\Delta f = f(x+h) - f(x).$$

Den deriverte til $f(x)$ trenger ikke eksistere i alle punkt i def. mengden til $f(x)$.



ikke deriverbar i $x = a$.



$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ er ikke deriverbar i 0 : $\dfrac{|0+h| - |0|}{h} = \dfrac{|h|}{h}$

$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$ og $\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$. $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ eksisterer ikkje.

Resultat: Hvis $f(x)$ er deriverbar i a så er $f(x)$ kontinuerlig i a.

Den deriverte til noen funksjoner:

$$\frac{d(ax+b)}{dx} = (ax+b)' = a$$

$$\left(\lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)+b - (ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a\cdot h}{h} = a \right)$$

$\frac{d}{dx}(2\pi) = 0$ etc. Den deriverte til en konstant funksjon er identisk lik 0.

(2) $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$

$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$: $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2 h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$

$= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3x\cdot h + h^2 = \underline{3x^2}$

$\vdots$

$\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$.

$n = 1, 2, 3 \ldots$

↳ Vi beviser dette ved å benytte den utvida konjugatsetningen : $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}\cdot a + \cdots + b\cdot a^{n-2} + a^{n-1})$

$$\frac{d}{dx} x^n = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{(x+h-x)}^{h}\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}\cdot x + \cdots + (x+h)\cdot x^{n-2} + x^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}\cdot x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}$$

(n ledd)

$$= \underline{n \cdot x^{n-1}}$$

For eksempel $\frac{d}{dx} x^{98} = 98 \cdot x^{97}$.

$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad \frac{d}{dx} x^{1/2} = \frac{1}{2} x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2x^{1/2}}$

Fra definisjonen:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h\cdot(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \qquad x > 0$$

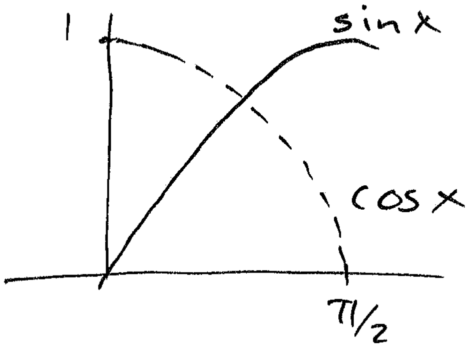
$$\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{d}{dx} x^{1/n} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

$$\left(\frac{1}{n} (x^{\frac{1}{n}})^{1-n} = \frac{1}{n}\left((x^{\frac{1}{n}})^{n-1}\right)^{-1} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} \right)$$

bevis er tilsvarende beviset for $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$ n naturlig.

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$



3

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$ addisjonsformelen

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cdot\cos(h) + \sin(h)\cdot\cos(x) - \sin(x)}{h}$$

$$= \sin(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}}_{0} + \cos(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}}_{1}$$

$$= \cos(x)$$

(her har vi benyttet grensesetningene

$$\lim_{x\to a} k\cdot g(x) = k\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$ k konstant)

Tilsvarende bevises $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$.

Hva er $\frac{d}{dx}a^x$?

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x\cdot a^h - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} a^x\cdot\frac{a^h-1}{h} = a^x\cdot\underbrace{\left(\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\right)}_{\text{grensen eksisterer for } a>0.}$$

Det finnes et tall $e = 2.71828\ldots$ slik at grensen $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$. e kalles Eulers tall.

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

(4)

Tangentlinjen til $f(x)$ for $x = a$ er linjen med stigningstall $f'(a)$ som går gjennom $(a, f(a))$.

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Stigningstallet til sekanten til f gjennom $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$ er

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

"Nummerisk deriverte" $\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$

konvergerer mye raskere mot $f'(a) = \dfrac{df}{dx}(a)$

enn $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}.$

Illustrerte dette ved bruk av Geogebra.

Tangentlinjen i $(a, f(a))$ er den lineære tilnærmingen til f rundt $x = a$

$$f(a+h) \sim f(a) + f'(a)(h)$$

$(h = x-a)$ liten.

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x-a)$$

(eksempler side 6)

Høyere ordens deriverte

15

$\frac{d}{dx} f(x)$ er en funksjon. Vi kan derfor gjenta derivasjonen.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f\right) = \frac{d^2}{dx^2} f = (f(x)')' = f''(x)$$

n ganger:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x) \longleftarrow \text{må bruke parenteser.}$$

$f = x^3$ $\quad f' = 3x^2$ $\quad f'' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2 \cdot x = 6x$

$f''' = 6$ $\quad f^{(n)} \equiv 0 \quad n \geq 4.$

$f = x^n$ $\quad f' = n x^{n-1}$ $\quad f^{(2)} = n(x^{n-1})' = n(n-1)x^{n-2}$ $\quad (n \geq 2)$

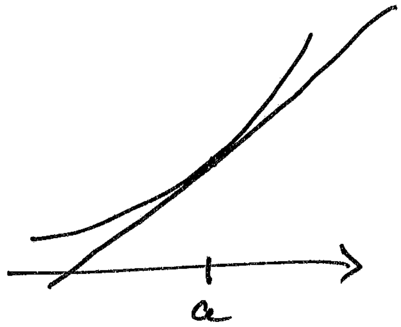
$$f^{(n)} = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Hva er $f^{(m)}$ for $m < n$?

$f^{(m)} \equiv 0$ når $m > n$.

29.01

Tilnærmer $f(x)$ med tangentlinjen (for $x=a$) for x nær a.



Dette kalles den lineære tilnærmingen til $f(x)$ rundt a.

$$f(x) \sim f'(a)(x-a) + f(a).$$

$$\left(\begin{aligned}\Delta f &= f(x) - f(a)\\ &\sim f'(a)(x-a)\\ &= f'(a)\,\Delta x\end{aligned}\right)$$

(6)

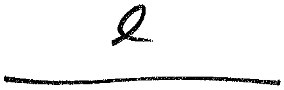
$$\sqrt{x} \sim \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$$

Eksempel $\quad x = 24 \qquad a = 25 = 5^2$

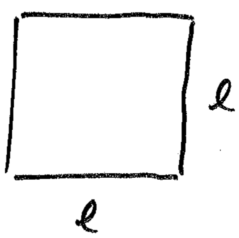
$$\sqrt{24} \sim \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}}(24-25)$$

$$5 + \frac{1}{10}(-1) \quad \text{så}$$

$$\sqrt{24} \sim 4.9 \qquad (\sqrt{24} = 4.898979\ldots)$$



Anta lengden har en usikkerhet på 1% $\quad \left|\frac{\Delta l}{l}\right| < 1\%$



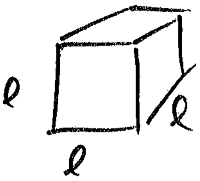
Areal $A = l^2$

$$\Delta A = 2l \cdot \Delta l$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{2l\,\Delta l}{l^2} = 2\frac{\Delta l}{l}$$

$$\left|\frac{\Delta A}{A}\right| < 2\%$$

Kube



$$V = l^3$$

(7)

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3l^2 \cdot \Delta l}{l^3} = 3\left(\frac{\Delta l}{l}\right)$$

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| < 3\left|\frac{\Delta l}{l}\right| = 3\%.$$

Høyere ordens tilnærming til $f(x)$ rundt $x=a$

Taylor polynomet av orden n til $f(x)$ rundt $x=a$ er et polynom av grad n (eller lavere) som har samsvarende m-deriverte med f i $x=a$ for $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

$$P_n f(x)$$

$$P_n f(a) = f(a), \quad (P_n f)'(a) = f'(a), \quad \dots, \quad (P_n f)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

(Forutsetter at $f(x)$ er n ganger deriverbar i $x=a$)

$$P_0 f(x) = f(a) \qquad P_1 f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

(lin. tilnærming)

$$P_2 f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$\boxed{P_n f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}}$$

(Fordi

$$\left((x-a)^m\right)^{(k)} = \begin{cases} 0 & k > m \\ m! & k = m \\ m(m-1)\cdots(m-k+1)(x-a)^{m-k} & m > k \end{cases}$$

verdien i $x=a$ er

$$\begin{cases} 0 & k \neq m \\ m! & k = m. \end{cases}$$

)

$f(x) = e^x \qquad \frac{d}{dx} e^x = e^x \qquad (e^x)^{(n)} = e^x$

8 $\quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1. \qquad a = 0$

$$P_n(e^x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

(Resultat $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$ (tar med alle leddene $\frac{x^n}{n!}$ for $n \geq 0$))
omhandles i Matte 2000

$f(x) = \sin x \qquad a = 0 \quad : \quad 0$

$f'(x) = \cos x \qquad 1$

$f^{(2)}(x) = -\sin x \qquad 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x = f(x) \qquad 0$

$$P_n(\sin x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots + \frac{(\sin x)^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Tilsvarende

$$P_n(\cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(\cos x)^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Utvider vi det av e^x, $\sin x$, $\cos x$ fra reelle til komplekse tall ved å bruke potensrekkene samsvarer det med tidligere def.

$$e^{ix} = 1 + \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{-x^6}{6!} + \dots$$
$$+ \; i \cdot x + \frac{-ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} + \frac{-ix^7}{7}$$

$$= \cos x + i \sin x. \qquad \text{Eulers formel.}$$

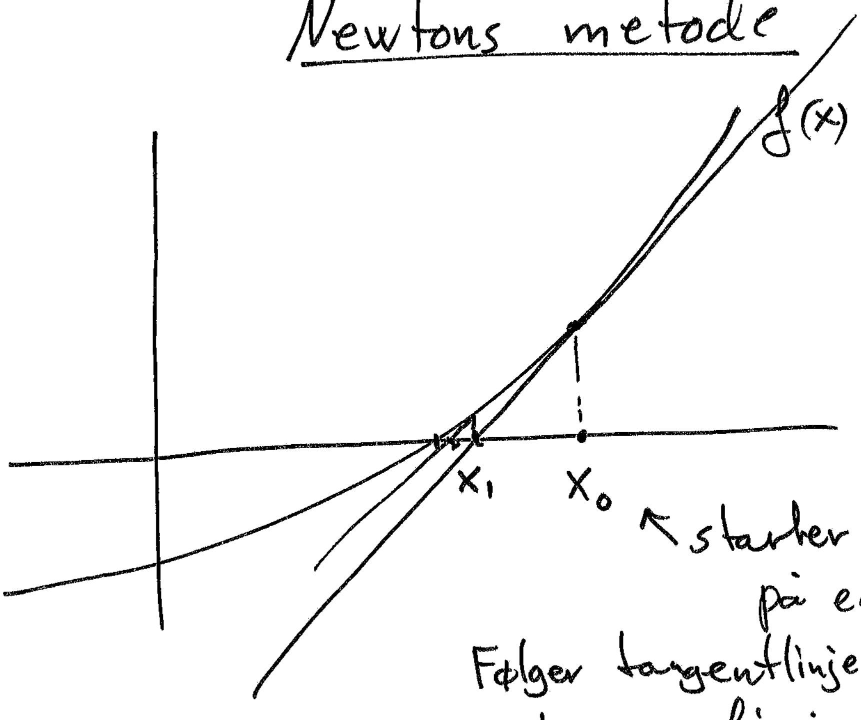
Taylor polynom kan brukes til å finne grenser

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x + x^2/2 + \cdots)/x}{(x - x^3/6 + \cdots)/x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x/2 + \cdots}{1 - x^2/6 + \cdots} = \underline{\underline{1}}$$

(9)

Newtons metode



↖ starter med å gjette på en løsning.

Følger tangentlinjen ned til x-aksen og lar skjæringspunktet med x-aksen bli det nye estimatet.

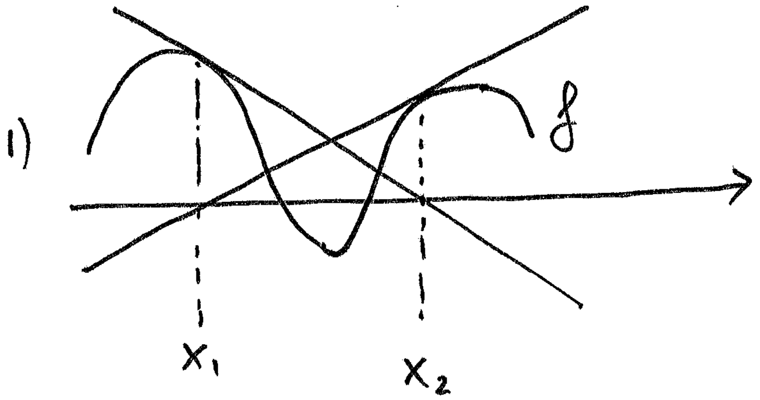
$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$ (fra figuren)

Så $\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - x_1$ og $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Vi kan gjenta prosedyren flere ganger

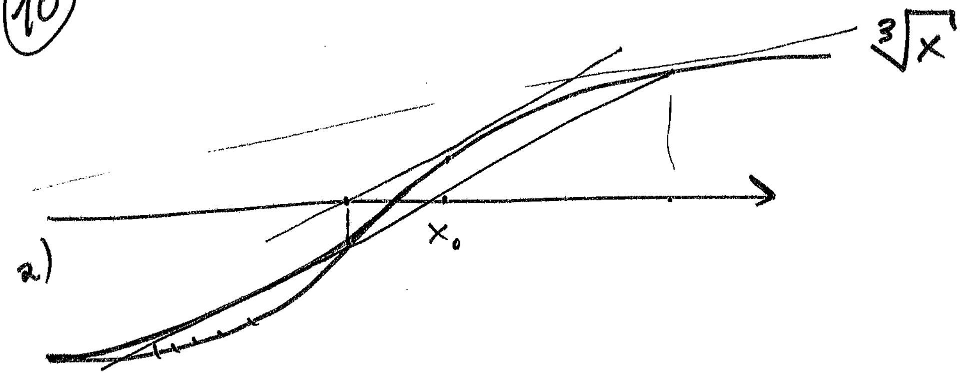
$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ $\qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Newtons metode virker ikke alltid.

1) 

Newtons metode sender oss frem og tilbake mellom x_1 og x_2.

(10)

2) 

Newtons metode vil ikke konvergere. $|x_n|$ vokser med økende n.

3) Hvis $f'(x_n) = 0$ gir metoden ingen mening.

Newtons metode gir oss følgende rekursive formel for å finne kvadratrøtter:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

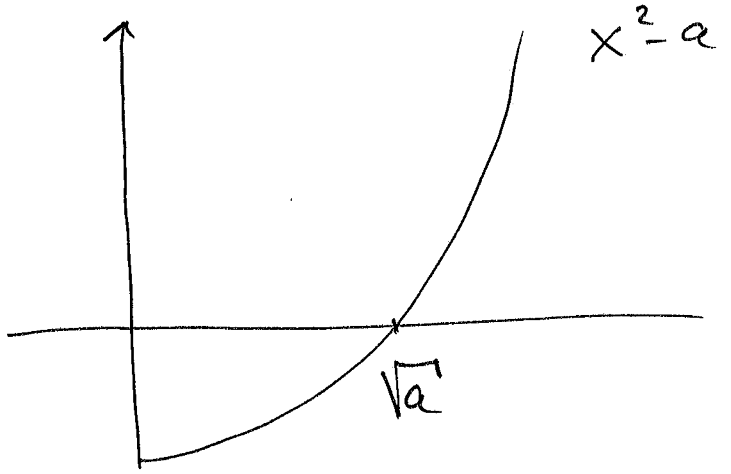
konvergerer mot $\sqrt{a}$.

$a = 2$, $x_0 = 2$ $x_1 = \frac{3}{2}$ $x_2 = 1{,}4166\ldots$

$x_3 = 1{,}4142156$

→

(11)



$$f(x) = x^2 - a \qquad f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - (x_n^2 - a)}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

Vi analyser nå hvor effektiv newtons metode er i dette tilfellet:

$$x_n = \underset{\text{eksakt}}{\sqrt{a}} + \underset{\text{avviket}}{h}.$$

$$x_{n+1} = \frac{(\sqrt{a} + h)^2 + a}{2(\sqrt{a} + h)} = \frac{a + 2\sqrt{a}\cdot h + h^2 + a}{2(\sqrt{a} + h)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{a} + h)\cdot\sqrt{a} + h^2}{2(\sqrt{a} + h)} = \sqrt{a} + \frac{h^2}{2(\sqrt{a} + h)}$$

Når h er liten sammenlignet med $\sqrt{a}$ så er avviket $\sim$ kvadratet av forrige avvik (delt på $2\sqrt{a}$).

feil $\underset{n}{\frac{1}{1000}} \longrightarrow \underset{n+1}{10^{-6}} \longrightarrow \underset{n+2}{10^{-12}}$ etc.