8 jan 2015

(1) Løs likningen

$$(2+i)z + i = 3-i$$
$$(2+i)z = 3-2i$$
$$z = \frac{3-2i}{2+i}$$

$$z = (3-2i)\cdot\frac{1}{2+i}$$
$$= (3-2i)\,\frac{2-i}{2^2+(-1)^2}$$
$$= \frac{1}{5}(3-2i)(2-i)$$
$$= \frac{1}{5}\left(3\cdot 2 + 2i^2 + 3(-i) + (-2i)\cdot 2\right)$$
$$= \frac{1}{5}(4-7i)$$
$$= \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

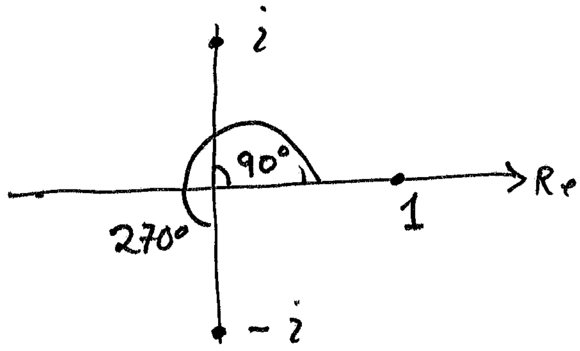
$$\left(\begin{aligned} w^{-1} &= \frac{\bar{w}}{w\cdot\bar{w}} \\ w^{-3} &= w^{-1}\cdot w^{-1}\cdot w^{-1} = (w^{-1})^3 \\ \frac{1}{w^3} &= \left(\frac{1}{w}\right)^3 \end{aligned}\right)$$

$$\left(\frac{u}{v} = u\cdot\frac{1}{v}\right)$$

$$w = a+ib$$
$$\bar{w} = a-ib$$
$$w\cdot\bar{w} = a^2+b^2 \rightarrow \left((a+ib)(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2-i^2b^2 = a^2+b^2\right)$$
$$\frac{1}{w}\cdot\frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{\bar{w}}{w\cdot\bar{w}}$$

---

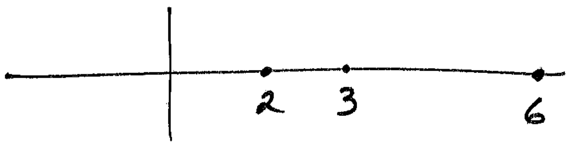
② Kompleks multiplikasjon



$$i \cdot (-i) = -i^2 = 1$$

summen av vinklene er

$(90+270)^\circ = 360^\circ$



Addisjonsformlene for sin og cos

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1)$$

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos(\theta_1)\cdot\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$$

To komplekse tall beskrevet med polare koordinater

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2 \big(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i^2 \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2$$

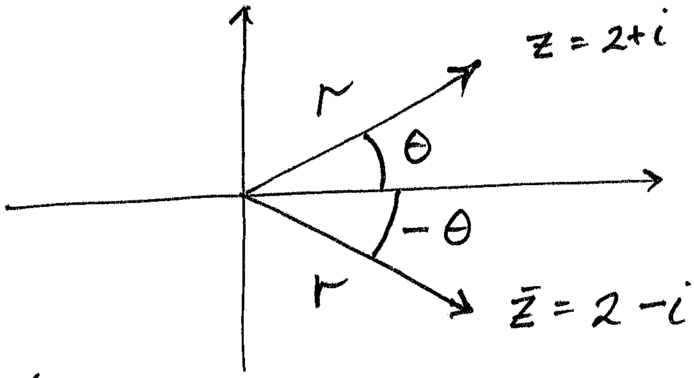
$$+ i(\cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_1) \big)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

Produktet av komplekse tall på polar form finner vi ved å gange sammen lengdene og legge sammen vinklene.

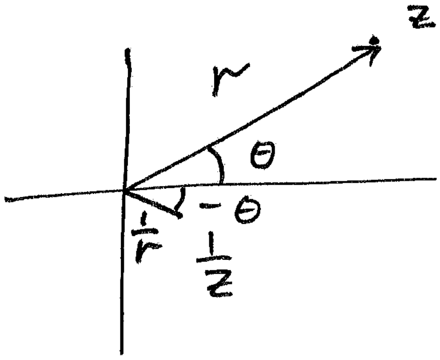
Hva er den geometriske fortolkning av kompleks

(3) konjugasjon?



"snur fortegn på vinkelen"

"reflekterer rundt den reelle akse"



$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

de Moivres formel.

<u>oppg</u> Finn polynomet $P(x)$ slik at

$$P(\cos(x)) = \cos(3x)$$

Funksjonen $x \overset{\text{til}}{\longmapsto} \cos x + i \sin x$

tar sum til produkt

(finner produktet ved å ta summen av vinklene)

lengden er lik 1

$x = 0$ gir verdien $\cos 0 + i \sin 0 = 1$.

$$\frac{d}{dx}(\cos x + i \sin x) = -\sin x + i \cos x$$
$$= i(\cos x + i \sin x)$$

Dette motiverer følgende definisjon

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{Eulers formel}}$$

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

e^a er lengden til e^{a+ib}

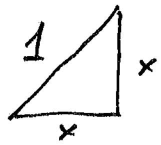
og b er vinkelen (en vinkel) til e^{a+ib} på polar form.

---

z med lengde r og vinkel θ

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \underline{re^{i\theta}}$$

Skriv $e^{2+\pi i/4}$ på kartesisk form



$$e^2 \cdot e^{i\pi/4} = e^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= e^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \underline{\frac{e^2}{\sqrt{2}} + \frac{e^2}{\sqrt{2}} \cdot i}$$

n-te røtter til w er løsninger z til likningen $z^n = w$

5

w på polar form $\quad w = re^{i\theta}$

En n-te rot av w er $\sqrt[n]{r}\, e^{i\theta/n}$

(fordi $\left(\sqrt[n]{r}\, e^{i\theta/n}\right)^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n \cdot \left(e^{i\theta/n}\right)^n$
$= r \cdot e^{i\theta}$)

Eks $\quad w = 4 \qquad n = 2$

$$4 = 4e^{i\cdot 0}$$
$$= 4e^{2\pi i}$$

en n-te rot er $\sqrt{4}\, e^{i0/2} = 2$

——— $\sqrt{4}\, e^{2\pi i/2} = 2e^{\pi i} = -2$

$z^n = w$ har n løsninger (grad n polynom)

$w = re^{i\theta + 2\pi i\cdot m}$ ↖ legger til hele omløp

n-te røtter : $\sqrt[n]{r}\; e^{\frac{i(\theta + 2\pi\cdot m)}{n}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta} \cdot e^{\frac{i2\pi\cdot m}{n}}$

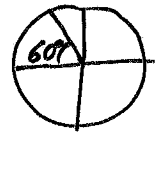
$m = 0, 1, 2, \dots, n-1$

eks

$z^3 + 1 = 0 \qquad z^3 = -1$

En rot er $z = -1$.

De andre røttene får vi ved å gange med $e^{\frac{2\pi i}{3}}$
(0, 1 og 2 ganger) $\left(\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{360°}{3} = 120°\right)$



$$e^{2\pi i/3} = \cos(120°) + i\sin(120°)$$
$$= \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

En annen rot er derfor $-1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Den tredje roten er $-1\cdot e^{4\pi i/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑥

$$x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4)$$

$$(x-2)(x+2)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x-2i)\cdot(x+2i)$$

$$x^2-(-4)$$

$$(2i)^2$$

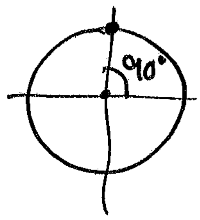
$$x^4 = 16$$

$m=0,\dots 3$

En rot er $x = 2$

De andre røttene er $2\cdot e^{(2\pi i/4)\cdot m}$

$$e^{\pi i/2} = i$$



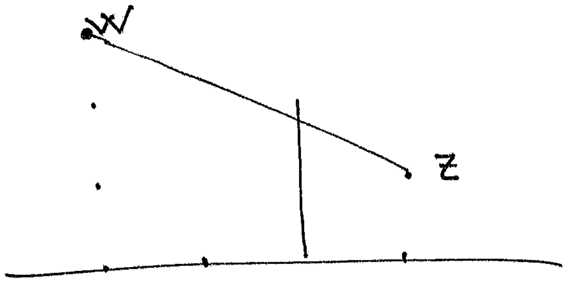
Røttene er $2\cdot(i)^m$ $\quad m=0,1,2,3$

$$\underline{2,\ 2i,\ -2,\ -2i}$$

Oppg.

Faktoriser x^4+1 som et produkt av to reelle pol. av grad 2.

Eks Finn avstanden mellom $z = 1+i$ og $w = -2+3i$.



$$\vec{zw} = w - z = (-2+3i) - (1+i)$$

$$= -3+2i$$

Avstanden er $|\vec{zw}| = |-3+2i| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \underline{\underline{\sqrt{13}}}$

Løs likningen $2x^2 - ix + 1 = 0$

(hvorfor er abc-formelen gyldig?)

abc-formelen gir $x = \dfrac{i \pm \sqrt{(-i)^2 - 4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}$

$$x = \frac{i\pm\sqrt{-9}}{4} = \frac{i\pm 3i}{4} = i \text{ og } -i/2$$

Løsningene er $\underline{x = i}$ og $x = \underline{-i/2}$