Matte 1000 DAFE 1000 Halvard
ELFE 1000 Fausk

De som tar 3 termin skal bare følge TRFE 1000
(H. Hammer)

Det er opprettet en nettside til kurset
Link på fronter / Søk : fausk hioa.

Dere skal bruke MATLAB i kurset.
Ta med PC med Matlab installert på mandag.
spør Sølve om hjelp med installasjon om nødvendig.
8 uker med matlab forelesning / øving. (til 23. feb.)
Etter det flyttes torsdagsforelesning (8:30) til
der matlab forelesningen var (mand. 11:30 PH330)
Repetisjonskurs : torsdager 16:30 - 18:15 P35-PI 850.
Hjelp til dem som ikke kan alt kurset bygger på.
Et nettbasert kurs som også kan være til hjelp
er mattenøkkelen.no

Øvingstimer: DA 2t etter forelesningene
EL tirsdag 10:30 (E. Tøstesen)
fredag 8:30
(samtidig med at noen på EL har digitalsystemer)
Vi forsøker å la dere velge hvilke av de 2 øvingene
dere vil gå på. (Hvis det ikke fungerer, kan vi dele opp klassene)

4 obligatoriske innleveringer. Alle må godkjennes
for å kunne ta eksamen (flere forsøk?)
Fokuser på å lære!

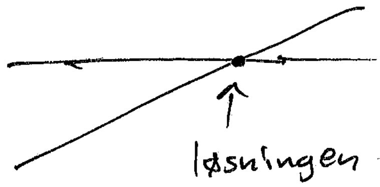
7. jan 2015 Kap 2 Komplekse tall geometrisk

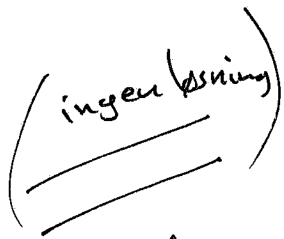
Lineær likning $2x+3=7$

(1)

$$2x = 7-3 = 4$$
$$\underline{x} = \frac{4}{2} = \underline{2}$$

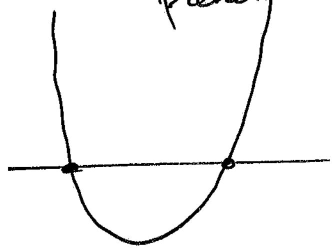
løsning (gjør påstanden sann)





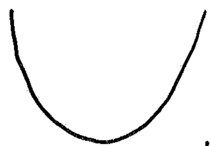
Kvadratisk likning $x^2-1=0$

$$x^2 = 1$$
$$x = 1 \ (\sqrt{1})$$
og $x = -1 \ (-\sqrt{1})$



Faktoriserer x^2-1 : $x^2-1 = (x-1)(x+1)$

irredusibelt polynom over de reelle tall. $x^2+1=0$



ingen reell løsning

Vi utvider de reelle tall $\mathbb{R}$ til de komplekse tall $\mathbb{C}$ slik at x^2+1 faktoriseres som et prod. av lineære polynomer.

Innfører en størrelse i slik at

$$i^2+1=0, \quad \underline{i^2=-1}$$

$$(-i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = 1 \cdot -1 = -1.$$

Noen skriver $\sqrt{-1} = i$

$$x^2+1 = (x+i)(x-i) \quad \left(\begin{aligned} &= x \cdot x + i \cdot x + x \cdot (-i) + i(-i) \\ &= x^2 + ix - i \cdot x - i^2 = x^2+1 \end{aligned} \right)$$

(2) $x^2 + a = (x - i\sqrt{a})(x + i\sqrt{a}) \quad a > 0$

$= (x - \sqrt{-a})(x + \sqrt{-a}) \quad a < 0$

$x^2 + bx + c = 0$ Fullfører kvadratet:

$$\underbrace{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2}_{x^2 + 2\cdot\frac{b}{2}x + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) = 0$$

Så alle 2.grads polynomer kan faktoriseres som et produkt av lin. polynomer over $\mathbb{C}$.

Fundamentalteoremet i algebra

Alle polynomer med komplekse koeffisienter kan faktoriseres over $\mathbb{C}$ som et produkt av lineære polynomer.

Komplekse tall er på formen

(3)

$$z = a + b \cdot i \qquad a, b \text{ reelle tall}$$

a = realdel, b = imaginærdel

$Re(z) = a$, $Im(z) = b$ når $z = a + bi$

Addisjon og multiplikasjon av komplekse tall som for polynomer med variabel i samt $i^2 = -1$.

$$i^3 = i \cdot (i^2) = -i$$
$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$
$$i^5 = i \cdot i^4 = i \cdot 1 = i$$
$$\vdots$$
$$i^{1000} = (i^4)^{250} = 1^{250} = 1$$
$$i^{1003} = i^{1000} \cdot i^3 = -i \quad \text{etc.}$$

eks:

$$(2+i) + (-3+5i) = 2 + (-3) + i + 5i = -1 + 6i$$
$$(2-i) - (-3+2i) = 2 - i + (3 - 2i) = \underline{5 - 3i}$$

$$(3+2i)(5-i) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot (-i) + 2i \cdot 5 + 2i(-i)$$
$$= 15 - 3i + 10i + 2(\underbrace{-i^2}_{+1})$$
$$= \underline{17 + 7i}$$

Kompleks konjugasjon : skifter i til $-i$.

$$z = a + bi$$

Den kompleks konjugerte til z er $\bar{z} = a - bi$

Egenskaper: $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$ $\qquad \bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

(4)

$\overline{2+3i} = 2-3i$ $\qquad \overline{4} = 4$

$\overline{i} = -i$

$z \cdot \bar{z}$ er et reelt tall ≥ 0

$z\bar{z} = 0 \iff z = 0$:

$z = a + bi \qquad \bar{z} = a - bi$

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + abi - abi - b^2 \cdot i^2$$
$$= a^2 + b^2$$

Alle komplekse tall z ulik 0 har en multiplikativ invers :

$z \cdot \left(\frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}\right) \qquad \frac{z \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = 1$

reelt tall

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} \quad \left(= \bar{z} \cdot \left(\frac{1}{z \cdot \bar{z}}\right) \right)$$

$$w : z = \frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z} = w \cdot z^{-1} \qquad z \neq 0$$

eksempel

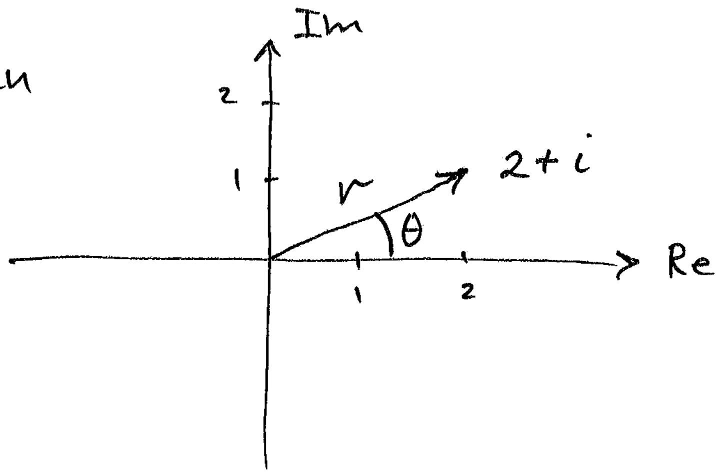
$$(2+3i)^{-1} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{4+9}$$
$$= \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13} i$$

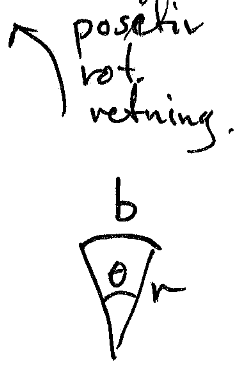
$$\frac{2+i}{2+3i} = (2+i) \cdot (2+3i)^{-1}$$
$$= (2+i) \cdot \frac{2-3i}{13} = \frac{(2+i)(2-3i)}{13}$$
$$= \frac{1}{13}\left(2 \cdot 2 + 2(-3i) + i \cdot 2 + i(-3i)\right)$$
$$= \frac{1}{13}\left(4 - 6i + 2i + 3\right) = \frac{7-4i}{13}$$

Geometrisk fortolkning av $\mathbb{C}$

(5)

Kompleksplan





$\theta = \frac{b}{r}$ vinkel i radianer.

$360° \sim 2\pi$ rad.

$\sim 2\pi$ rad.

Addisjon i $\mathbb{C}$ er vektoraddisjon.

polære koordinater:

Angir vi posisjon ved lengde $r\ (\geq 0)$ fra origo.

samt vinkel θ med Re-aksen.

polar → kartesiske koordinater $\quad x = r \cdot \cos\theta$

$y = r \cdot \sin\theta$

" ← — " —

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

lengden til det komplekse tallet $z = a + bi$

er avstanden fra origo til z i planet

(Pytagoras sinsats)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Vinkelen θ er ikke entydig

$\mathrm{Re}\, z > 0$: $\quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi \cdot n \quad$ n heltall

$\left(= \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$

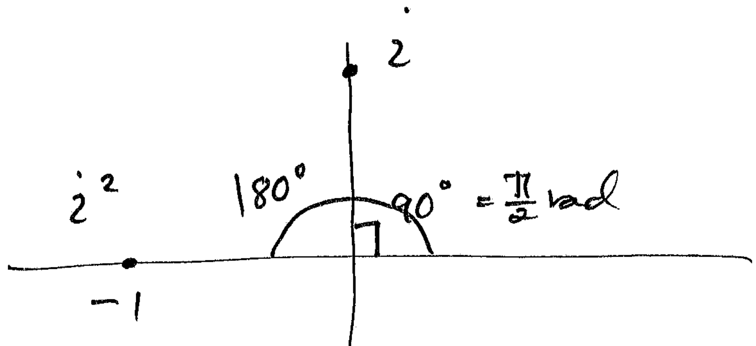
$\mathrm{Re}\, z = 0 \quad \mathrm{im}\, z > 0$: $\quad \theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$

$\mathrm{im}\, z < 0$: $\quad \theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot n$

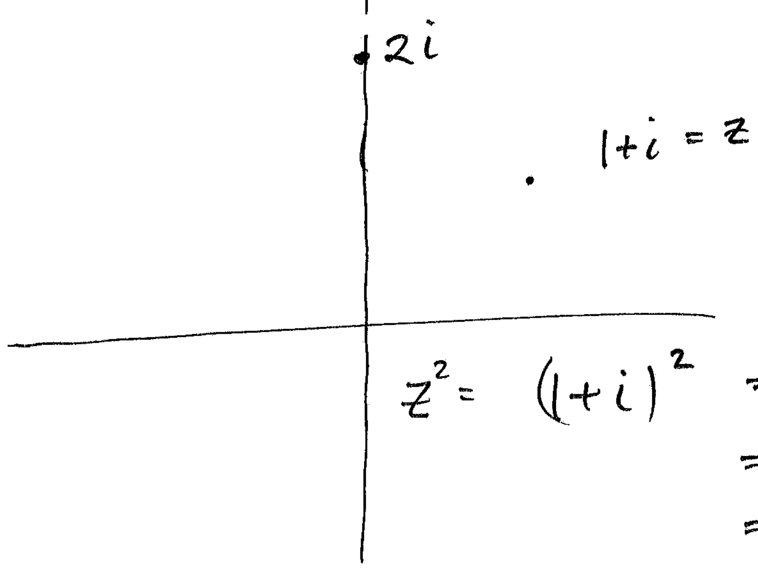
$\mathrm{Re}\, z < 0$: $\quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \underline{\pi} + 2\pi \cdot n$

⑥ Multiplikasjon av komplekse tall:
i det komplekse plan svarer det til

- multiplikasjon av lengdene
- legge sammen vinklene



i^2 lengde 1
vinkel $\frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$ rad.



$|z| = \sqrt{2}$
$\theta = \frac{\pi}{4}$ (45°)

$$z^2 = (1+i)^2 = 1^2 + i^2 + 2 \cdot 1 \cdot i$$
$$= 1 - 1 + 2i$$
$$= \underline{\underline{2i}}$$

lengde $\sqrt{2}^2 = 2$
vinkel $\frac{\pi}{4} \cdot 2 = \frac{\pi}{2}$