Innlevering	ELFE KJFE MAFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 4
Innleveringsfrist	Mandag 12. oktober 2015 før forelesningen 12:30
Antall oppgaver:	$7+3$

De sju første oppgavene er mest eksamensrelevante.

1

Deriver de følgende funksjonene.

a) $f(x) = 3\cos(2x-1) + 12$

b) $f(x) = x^2 \sin(x)$

c) $f(x) = \cos(\sin(x))$

d) $f(x) = \cos(2x)\sin(3x)$

e) $f(x) = \sin(7x+1)/(\sin(-x)+x)$

f) $f(x) = \sin(3x) + \sin(x) - 4\sin(x)\cos^2(x) - 1$

g) $h(x) = \begin{cases} -x^3 & x < 0 \\ x^4 & x \geq 0 \end{cases}$

2

Bestem parametrene a og b slik at funksjonen

$$h(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x < 1 \\ -x^3 & x \geq 1 \end{cases}$$

er deriverbar for alle x.

3

Finn alle tangentlinjene til funksjonen $f(x) = x^3 - x^2$ som er parallelle til linjen $y = 4x + 1$.

4

En kurve er gitt ved

$$x^3 - x^2y - y^4 + 7 = 0$$

Sjekk at punktet $(3, 2)$ ligger på kurven. Finn tangentlinjen til kurven i punktet $(3, 2)$.

5

En kuleformet beholder fylles med en væske. Tilførselen er jevn. Invendig radius til kulen er nøyaktig 1 meter. Det tar 1 time å fylle kulen halvfull. Hvor mye væske tilføres per sekund? Finn endringsraten for væskehøyden (fra bunnen) når væskehøyden er 3/4 av høyden til kulen (det vil si 3/2 ganget med radius til kulen).

6

Forklar hvorfor hver av funksjonene har akkurat *ett* nullpunkt i det oppgitte intervallet. Det er naturlig å henvise til skjæringssetningen monotonitester etc.

Forsøk med Newtons metode for å finne skjæringspunktet med x-aksen. Hvis det ikke fungerer bruk halveringsmetoden. Estimer nullpunktene med 4 gjeldende siffers nøyaktighet.

a) $x^2 - x - 1 \quad [1, 2]$

b) $\sqrt{x + 1} + \sqrt[3]{x} - 2 \quad x \geq 0$

c) $\arctan(x) - x - 1 \quad$ alle x

d) $x^3 + 2x - 2 \quad$ alle x

7

Finn alle lokale og globale maksimums- og minimumspunkt til funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & -2 < x < 1 \\ -1 & x = 1 \\ x^3 - 2x^2 - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

8

I denne oppgaven kan dere godt benytte halveringsmetoden. Løsningene skal finnes med en feil mindre enn 10^{-6}. Husk å benytte komandoen "format long" slik at dere får desimaltall med mange siffer i matlab.

a) Finn x-koordinaten til all punktene hvor grafen til 10^{x+1} og x^{10} møtes.

b) Finn alle nullpunkt til funksjonen gitt ved uttrykket $\tan(x) + x - 1$ og med definisjonsmengde $[0, 10]$. (Vinkelen har enheten radianer.)

9

Her skal dere benytte Newtons metode til å lage en kalkulator som regner ut kvadratrøtter. Dette er ganske realistisk i forhold til hvordan lommekalkulatorene faktisk regner ut kvadratrøtter. Vi tar utgangspunkt i funksjonen $f(x) = x^2 - a$. Det positive nullpunktet til $f(x)$ er $\sqrt{a}$ for $a > 0$. (Hvorfor er det et entydig nullpukt for $x \geq 0$?)

a) Vis at Newtons metode gir følgende rekursive formel for estimatet til nullpunktet (når vi starter med en positiv verdi for x)

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

b) Start gjerne med $x_0 = a$. Hvor mange iterasjoner ser det ut til at dere behøver for å regne ut kvadratroten med en nøyaktighet på minst 12 siffer? Test gjerne på et enkelt tilfelle, som $a = 4$, slik at det er lett å se hva som skjer. (Dere kan for eksempel lage en løkke i matlab som skriver ut de ulike verdiene til x_n rekursivt.)

c) Lag en matlab funksjon eller et skript som tar inn et tall og som gir ut kvadratroten til tallet (regnet ut ved den rekursive beskrivelsen ovenfor). Kall gjerne funksjonen rot. På hjemmesiden ligger en matlab funksjon som heter rot og som forøvrig regner ut en helt annen funksjon. Dere kan ta utgangspunkt i det skriptet og modifisere det hvis dere ønsker. (Dere trenger ikkje levere inn skriptet dere lager.)

10

Her er et standard eksempel som viser at den deriverte ikke alltid trenger være en kontinuerlig funksjon. Vis at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 \sin(1/x) & 0 < x \end{cases}$$

er deriverbar i alle punkt, men at den deriverte ikke er kontinuerlig i $x = 0$.

(Det er et resultat at diskontinuitetene til den deriverte må være en essensielle diskontinuiteter. Det finnes ikke en funksjon som har en derivert funksjon med hopp-diskontinuitet.)