Innlevering	ELFE KJFE MAFE Matematikk 1000 HIOA
	Obligatorisk innlevering 3
Innleveringsfrist	Mandag 28. september 2015 før forelesningen 12:30
Antall oppgaver:	10

1

En matirse M er en inverterbar 7×7-matrise. Anta at M har søylevektorene $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_7}$. Løs likningssystemet

$$x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_7\overrightarrow{v_7} = \overrightarrow{0}$$

2

Vi har likningssystemet $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Hvor A er lik $[\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3]$. Vi anvender Matlab kommandoen rref på totalmatrisen til likninssystemet og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.012 \\ 0 & 1 & 0 & -2.472 \\ 0 & 0 & 1 & 0.123 \end{bmatrix}$$

Uttrykk $\overrightarrow{b}$ som en lineær kombinasjon av søylevektorene til matrisen A.

3

Bestem verdiene for parametrene a og b slik at likningsystemet med totalmatrise radekvivalent til

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & b \end{bmatrix}$$

har

1. én løsning
2. uendlig mange løsninger
3. ingen løsninger

4

Regn ut determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

uttrykt ved de tre parametrene a, b og c. (Her er det naturlig å benytte den rekursive beskrivelsen av determinanter.)

5

1. Benytt den rekursive definisjonen av determinanter til å regne ut determinanten til

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 20 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

samt bestem inversmatrisen ved å finne den adjungerte til A

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(A)}{\det(A)}$$

6

En lineær transformasjon $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved først å skalere x-koordinaten med faktoren 2 og deretter rotere 90 grader om y-aksen i positiv retning. (bestemt av høyrehandsregelen). Finn standardmatrisen til T.

Hva blir standardmatirsen til den linære transformasjonen vi får hvis vi istede først roterer og deretter skalerer x-koordinaten?

7

En lineær transformasjon $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ har egenskapen

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestem standardmatrisa til T.

8

En lineær transformasjon $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ har egenskapen

$$T\left(\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \\ 13 \end{bmatrix} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} \quad T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 21 \\ 11 \\ -17 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Bestem standardmatrisa til T. Bruk gjerne matlab til å finne standardmatrisa. En m-fil med vektorene er lagt ut.

9

Avgjør om hvert av de følgende sett av vektorer er linært uavhengige. Hvis ikke uttrykk minst en av vektorene fra de andre vektorene. (Benytt gjerne beregninger fra oblig 2 oppgave 1.)

1.

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \\ -15 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

10

De reelle polynomene av grad n eller mindre, for et positivt heltall n, er et vektorrom over de relle tall. En basis er $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Slike polynomer kan entydig skrives som en lineær kombinasjon av disse basiselementene

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$$

og addisjon og skalar multiplikasjon av polynomer gjøres elementvis på koeffisientvektorene $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

1. Hva er dimensjonen til dette vektorrommet?

2. Derivasjon er en lineær transformasjon fra dette vektorrommet til seg selv. Beskriv denne lineære transformasjonen som en matrise ved å benytte basisen ovenfor.

   Hvis du synes dette er vanskelig å gjøre for generelle n så gjør det bare for $n = 5$.

3. Hva er determinanten til derivasjonstransformasjonen? Har derivasjonstransformasjonen en inversmatrise?

4. Hva er resultatet av å anvende derivasjonsoperatoren to ganger? Utfør matrisemultiplikasjonen og se om den resulterende linære transformasjonen er det du forventer. (Hva forventer du?)

5. Er transformasjonen som sender polynom $p(x)$ til $2p(x) - x \cdot p'(x)$ en lineær transformasjon fra vektorrommet til seg selv?

   Hvis ja, beskrive transformasjonen på matriseform med basisen ovenfor og finn inversmatrisen, hvis den finnes. (Avgrens deg til $n = 5$ hvis det generelle tilfellet er vanskelig.)