9. nov 2015

Taylorpolynom

1

Sum-notasjon (geometrisk rekke)

$$\sum_{n=0}^{7} x^n = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7$$

Summen fra $n=0$ til (og med) 7 av x^n.

$$\sum_{n=1}^{10} (3\cdot n) = 3+6+9+\cdots+30$$

$$x^2+x^3+x^4+x^5 = \sum_{n=2}^{5} x^n = \sum_{m=0}^{3} x^{m+2}$$ kan skrives på forskjellige måter.

Geometrisk rekke:

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n)(1-x)$$
$$= 1+x+x^2+\cdots+x^n$$
$$-(x+x^2+\cdots+x^n+x^{n+1})$$
$$= 1-x^{n+1}$$

Så $$1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$
$$= \frac{1}{1-x} + \left(\frac{-x^{n+1}}{1-x}\right)$$

$$\underbrace{\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{n} x^m}_{\text{Taylor polynom av orden } n} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{1-x}}_{\text{Restleddet.}}$$

(28. nov 2015)

Fra tidligere :

$$n \geq 0$$

② $$\sqrt{n^2+x} \sim n + \frac{1}{2n} \cdot x$$

1. ordens tilnærming
(tangentlinjen)

Finner en 2. ordens tilnærming.

$$\sqrt{n^2+x} \sim n + \frac{1}{2n} \cdot x + \frac{a_2}{2} x^2$$

$$a_2 = \frac{d^2}{dx^2} \sqrt{n^2+x} \Big|_{\text{når } x=0}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2\sqrt{n^2+x}} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) \frac{1}{(n^2+x)^{3/2}} \Big|_{x=0}$$

$$= \underline{\frac{-1}{4n^3}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(n + \frac{1}{2n} x + \frac{a_2}{2} x^2\right)\Big|_{x=0} = \frac{a_2}{2} \frac{d^2}{dx^2} x^2 \Big|_{x=0}$$

$$= \frac{a_2}{2} \cdot 2 = a_2$$

(samme verdi samt 1. og 2. ordens deriverte i $x=0$)

$$\sqrt{n^2+x} \sim n + \frac{1}{2n} x - \frac{1}{8n^3} \cdot x^2$$

$(8n^3 = (2n)^3)$

$n = 5$ $\quad x = -1$ $\quad \sqrt{24} = \sqrt{5 + (-1)}$

1. ordens tilnærming til $\sqrt{24} \sim 5 + \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot (-1) = \underline{4.9}$

2 ordens tilnærm $\sqrt{24} \sim 5 + \left(\frac{-1}{10}\right) - \frac{1}{(2 \cdot 5)^3} \cdot (-1)^2 = \underline{4.899}$

Nøyaktig : $\sqrt{24} \sim 4.898979\ldots$

Anta $f(x)$ er minst n ganger deriverbar

(3)

Taylor polynomet til $f(x)$ av orden n om $x = a$ er

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1} + \frac{f^{(2)}(a)(x-a)^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

hvor $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots n$ (fakultet)

$0! = 1$ $\quad 1! = 1$ $\quad 2! = 2$ $\quad 3! = 6$

$4! = 24$ $\quad 5! = 120$ $\quad 6! = 720 \ldots$

$T_n(x)$ polynom av grad n slik at

$$\left(f(x) - T_n(x)\right)^{(k)}\Big|_{x=a} = 0 \qquad k = 0, \ldots, n$$

(Faktoren $\frac{1}{n!}$ er med fordi $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{n!} x^n\right)\Big|_{x=0} = 1$.)

Forsøk gjerne kommandoen

Taylorpolynom[f, a, n] i geogebra.

En demonstrasjon er lagt ut på hjemmesiden.

Eksempler på Taylor polynom.

(4) $f(x) = e^x$ $\qquad f^{(n)}(x) = e^x$ alle n så:

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$(a=0)$

$f(x) = e^{2x}$ $\qquad f^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$

$f^{(k)}(0) = 2^k$

$$T_n(x) = 1 + \frac{(2x)}{1} + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + \dots + \frac{(2x)^n}{n!}$$

alternativt erstatt x med $2x$ i Taylor polynomet til e^x.

Taylorpolynom til sin og $\cos x$

	$x=0$
$(\sin x)$	0
$(\sin x)' = \cos x$	1
$(\sin x)^{(2)} = -\sin x$	0
$(\sin x)^{(3)} = -\cos x$	-1
$(\sin x)^{(4)} = \sin x$.	0

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \dots$$

(vendelig rekke) M2000 $\qquad$ like for alle x.

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{1+2i}}{(2i+1)!}$$

$a=0$

$\cos x$

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \; (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$a=0$

(5) $$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

Setter inn ix for x i Taylor pol. til e^x

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$= \cos(x) + i\sin(x)$$ Eulers formel

Eksempel $f(x) = \tan x$ om $x = 0$

$f(0) = 0$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\sin x)\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$f'(0) = 1$

$$f''(x) = (1+\tan^2 x)' = 2\tan x \cdot (\tan x)' = 2\tan x(1+\tan^2 x)$$

$f''(0) = 0$

$$f^{(3)}(x) = \left(2\tan x + 2\tan^3 x\right)'$$
$$= \left(2 + 6\tan^2 x\right)\cdot(\tan x)'$$
6 $$= \left(2 + 6\tan^2 x\right)\left(1 + \tan^2 x\right)$$

$f^{(3)}(0) = 2$

$f^{(4)}(0) = 0$ (siden $f(x)$ er odde og $a=0$)

$$T_4(x) = x + \frac{2}{6}x^3 = x + \frac{x^3}{3}.$$

Finn $f(x) = -3\tan(2x)$

Taylor polynomet til orden 4 om $x=0$

$$-3\left((2x) + \frac{(2x)^3}{3}\right) = \underline{-6x - 8x^3}.$$

Eksempel La $p(x) = 1 + 3x - x^2$

Hva er Taylor polynomene om $x=0$ til $p(x)$?

$T_0(x) = 1$ $\qquad T_1(x) = 1 + 3x$

$T_2(x) = 1 + 3x - x^2$ $\qquad T_n(x) = 1 + 3x - x^2 \quad n \geq 3$

(7) Hva er Taylor polynomen om $x = 1$?

$$T_0(x) = p(1) = 1+3-1 = \underline{3}$$

$$T_1(x) = p(1) + p'(1)(x-1)$$

$$p'(x) = 3-2x \qquad p'(1) = 1$$

$$T_1(x) = 3 + (x-1)$$

$$p''(x) = -2 \qquad p''(1) = -2$$

$$T_2(x) = 3 + (x-1) + \frac{-2}{2!}(x-1)^2$$

$$= 3 + (x-1) - (x-1)^2 .$$

$$T_n(x) = T_2(x) \qquad n \geq 3$$

$T_2(x)$ er lik $p(x)$!

Grenser via Taylor polynomer:

8

* $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \qquad \text{type } \frac{0}{0}$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \; - 1}{x}$$

$$\sim 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \cdots$$

Så $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right) = 1.$

* $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{(\sin x)^2}$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}$$

$$(\sin x)^2 \sim \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2$$

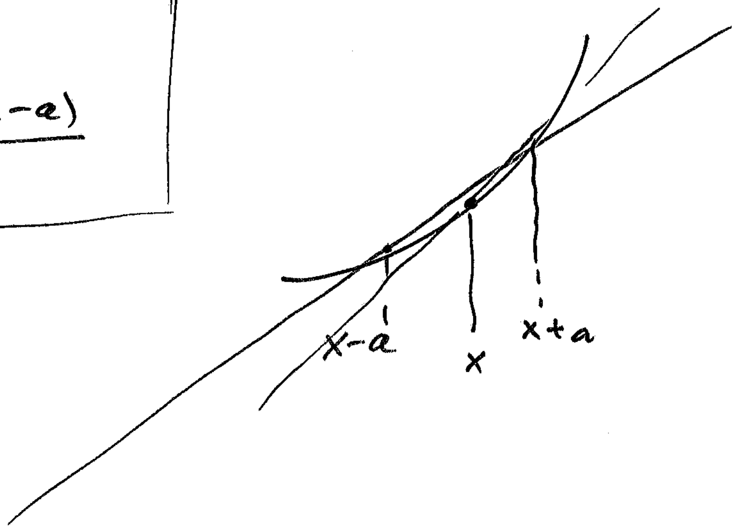
$$x^2\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{(\sin x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}}{x^2\left(1 - x^2/6\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \frac{\left(\frac{1}{2} - x^2/4!\right)}{\left(1 - x^2/6\right)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Numerisk deriverte.

$$f'(x) \sim \frac{f(x+a) - f(x-a)}{2a}$$



9

Definisjonen av den deriverte: $f'(x) = \lim_{a \to 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a}$.

Taylor polynom av orden 3.: $f(x+a) \sim f(x) + f'(x) \cdot a + \frac{f''(x)}{2} a^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{6} a^3$

Dettegir:

$$\frac{f(x+a) - f(x)}{a} \sim \frac{f'(x) \cdot a + f''(x)/2 \cdot a^2}{a}$$

$$\sim f'(x) + \frac{f''(x)}{2} \cdot a \quad \text{grad 1 i a}$$

Numerisk deriverte:

$$\frac{f(x+a) - f(x-a)}{2a} = \frac{1}{2a}\left(f'(x) \cdot a + \frac{f^{(3)}(x)}{6} a^3 \right) \cdot 2$$

$$\sim f'(x) + \frac{f^{(3)}(x)}{6} a^2 \quad \text{grad 2 i a}$$

se gjerne eksamens opg 8 mai 2015