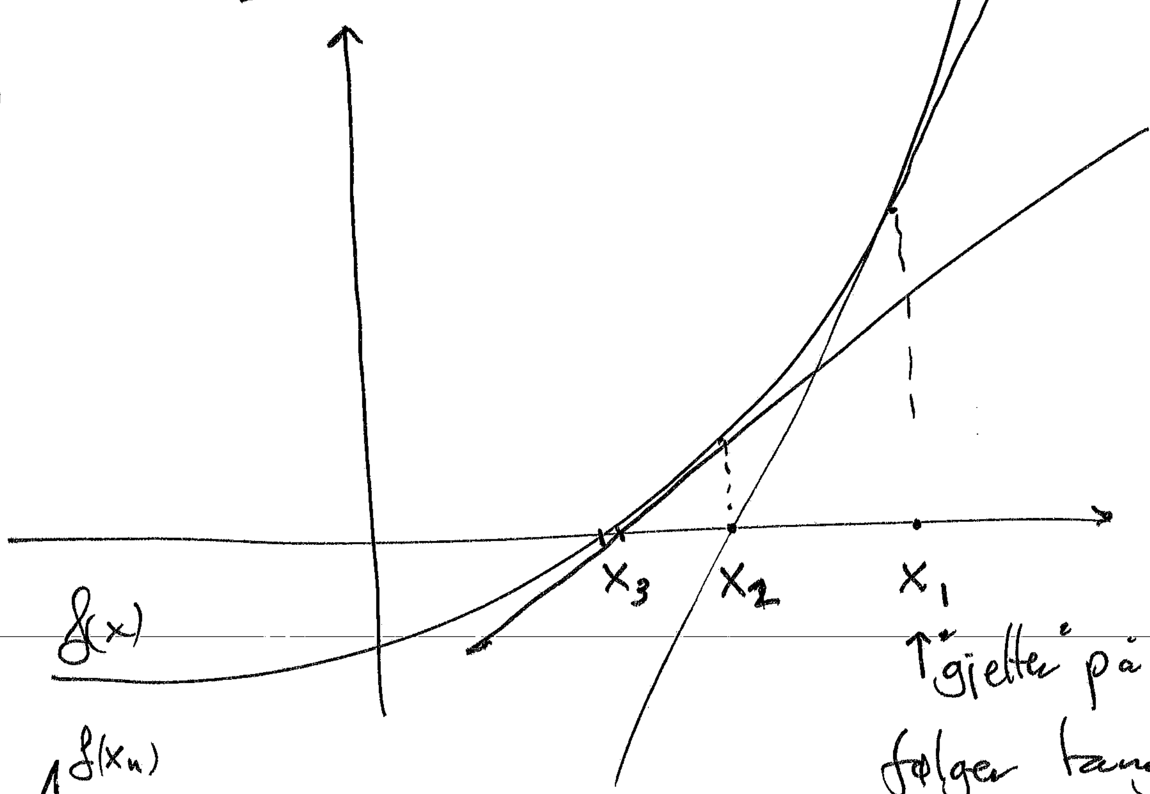
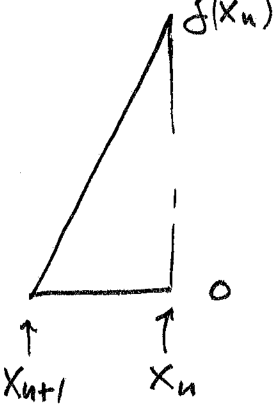
1 oktober
2015

Newtons metode

1



↑ gjetter på en første verdi
følger tangentlinjen ned til x-aksen.
Gjenta prosedyren med denne verdien.



$$\frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} = f'(x_n)$$

Så

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

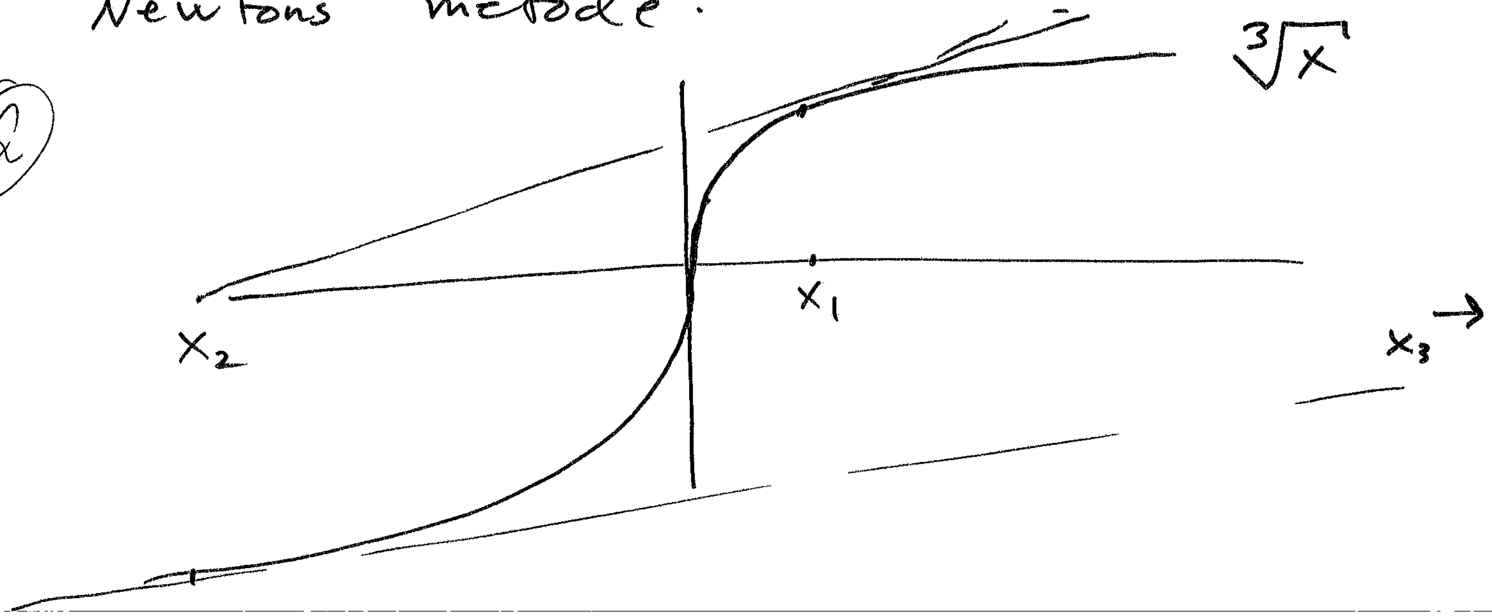
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

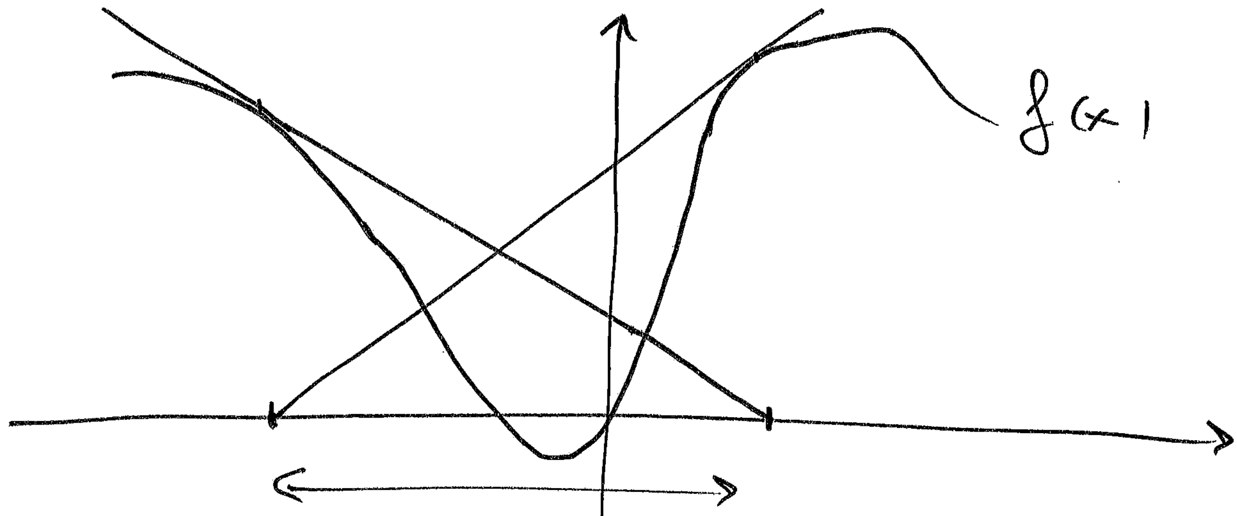
Newtons metode kan være svært effektiv, men den virker ikkje alltid.

Illustrerte Newtons metode på eksemplene
$x^2 - 2$ og $x^3 - 4x + 1$.

Noen ting som kan gå galt med Newtons metode:

a

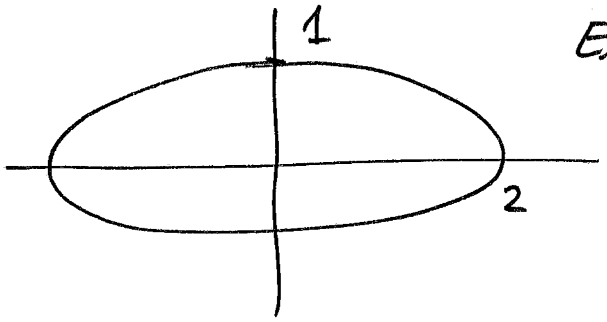




Newtons metode sender disse x-verdiene frem og tilbake!

På hjemmesiden kan dere finne Newtons metode implementert både i matlab og geogebra.

Implisitt derivasjon



Ellipse

(Enhetssirkelen strekt med en faktor 2 i x-retning)

3

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ er et punkt på ellipsen

$$\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \right)$$

Hva er $\frac{dy}{dx}$ i punktet?

1) $y^2 = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$y > 0$: $y = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$. etc

Alternativt:

2) (Implisitt derivasjon)

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx} 1 = 0$$

$$\frac{2x}{4} + 2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

så $\frac{dy}{dx} = \frac{-x/2}{2y} = \frac{-x}{4y}$

i punktet $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ er $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{2}}{4 \cdot 1/\sqrt{2}} = \frac{-(\sqrt{2})^2}{4} = \underline{\underline{\frac{-1}{2}}}$

Tangentlinjen i punktet er: $y = \frac{-1}{2}(x - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$y = \frac{-x}{2} + \sqrt{2}$$

$$e^{x\cdot y} + \sin(x+y) = 2$$

(4) punktet $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ligger på grafen til likningen. $\left(e^0 + \sin(\frac{\pi}{2}+0) = 2 \right)$

Finn $\frac{dy}{dx}$ i punktet.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x\cdot y} + \sin(x+y) \right) = \frac{d}{dx} 2 = 0$$

$$e^{x\cdot y}(x\cdot y)' + \cos(x+y)\cdot(x+y)' = 0$$

$$e^{x\cdot y}\left(1\cdot y + x\cdot \frac{dy}{dx}\right) + \cos(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

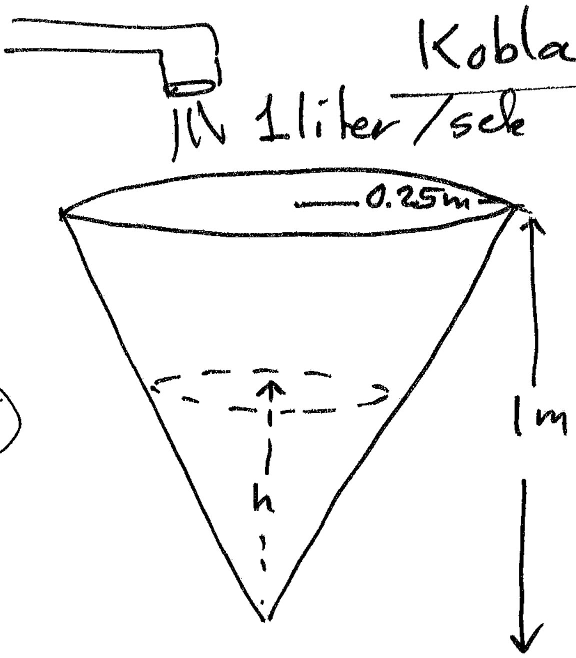
$$\frac{dy}{dx}\left(x e^{x\cdot y} + \cos(x+y) \right) = -y e^{x\cdot y} - \cos(x+y)$$

så $$\frac{dy}{dx} = -\frac{y e^{x\cdot y} + \cos(x+y)}{x e^{x\cdot y} + \cos(x+y)}$$

I punktet $(\frac{\pi}{2}, 0)$ er

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Kobla hastigheter



(5)

kjegle høyde 1 m

radius 0.25 m

Hva er endringraten (mhp. tid) til vannstanden når den er $\frac{1}{2}$ m.

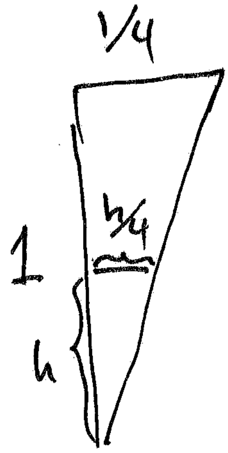
V volumet. $\frac{dV}{dt} = 1$ liter/sek.

ønsker å finne $\frac{dh}{dt}$.

V(h) : volum som en funksjon av høyden

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV(h(t))}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \quad \text{(kjerneregelen)}$$

så $$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\left(\frac{dV}{dh}\right)} \cdot \frac{dV}{dt}$$



$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \underbrace{h}_{\text{høyd}} \underbrace{\left(\frac{1}{4} \cdot h\right)}_{\text{radius}}^2$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot h^3.$$

så $$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 3h^2 = \underline{\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot h^2}$$

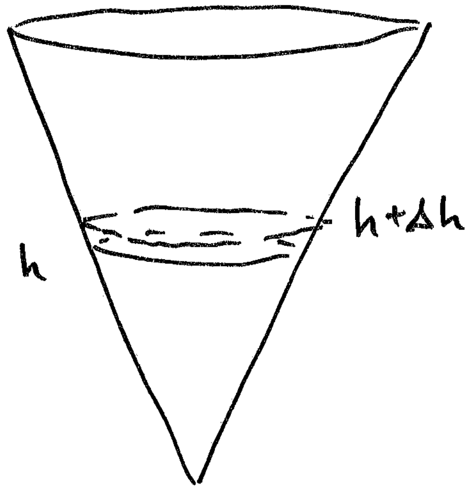
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi (1/4)^2 \cdot h^2} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{4^2}{\pi (1/2 \cdot m)^2} \cdot 1 \text{ Liter/sek}$$

$$= \frac{1}{\pi} 4^3 \cdot \frac{\text{Liter}}{m^2} / \text{sek} = \frac{1}{\pi} 64 \cdot \frac{1}{1000} \frac{m^3}{m^2} / \text{sek}$$

$$= \underline{\frac{0.064 \text{ m/s}}{\pi}} = \frac{6.4 \text{ cm/s}}{\pi} \approx \underline{2{,}0 \text{ cm/s}}$$

Alternativ måte å finne dV/dh.

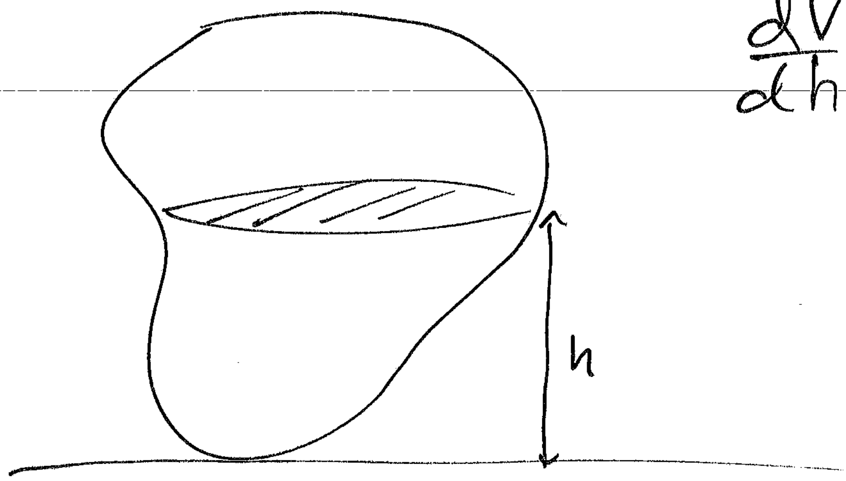
6



$$\Delta V = V(h+\Delta h) - V(h)$$
$$\approx \pi \, r(h)^2 \cdot \Delta h$$

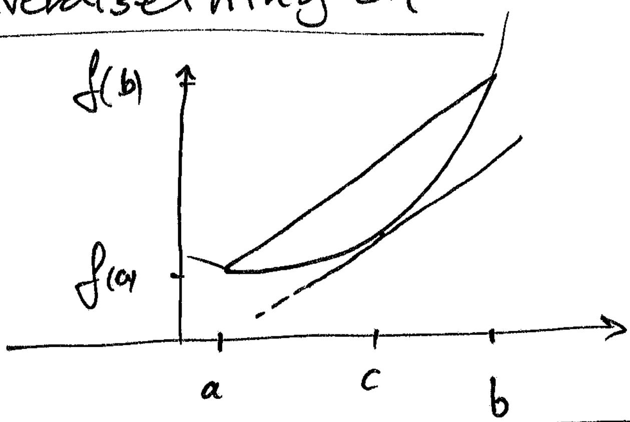
$$\frac{dV}{dh} = \pi \, r(h)^2$$

Mer generelt:



$$\frac{dV}{dh} = \text{tverrsnittarealet i høyde } h.$$

Middelverdisetningen



$f(x)$ kontinuerlig på $[a,b]$
deriverbar på (a,b)

Det finnes en $c \in (a,b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$s(t)$ posisjon
$\frac{d}{dt}s$ fart.

"gjennomsnittsfarten blir realisert som farten i et tidspunkt"

Bevis: Avgrenser oss til tilfellet hvor $f(a) = f(b) = 0$

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$g(a) = 0, \quad g(b) = 0, \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$g(x) \equiv 0$ på $[a,b]$ da er $g'(x) \equiv 0$ ✓

Hvis ikke finnes det maksimums og/eller minimumsverdier i (a,b) fra ekstremalverdisetningen.

Den deriverte i et (lokalt) ekstremalpunkt må være lik 0.

så det finnes en $c \in (a,b)$ slik at $g'(c) = 0$

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Resultatet er bevist.

$f(x)$ er voksende hvis $f(x) \le f(y)$ når $x \le y$

— strengt — $f(x) < f(y)$ når $x < y$

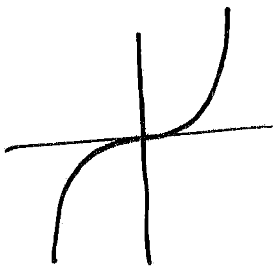
Tilsvarende : avtagende

Monotoni egenskaper

Hvis $f'(x) \geq 0$, da er $f(x)$ voksende

$f'(x) \le 0$, da er $f(x)$ avtagende.

$y = x^3$ $\quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 \geq 0$ så funksjonen er voksende



strengt voksende (men y' er ikke ekte positiv i alle punkt)

(derivert er lik 0 i origo)

bevis : Anta $f'(x) \geq 0$, Hvis funksjonen ikke er voksende, da finnes $x < y$

$f(x) > f(y)$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0$$

Fra middelverditeoremet finnes det en $c \in (x, y)$

slik at $f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0$. En motsigelse

Så $f(x)$ er voksende.

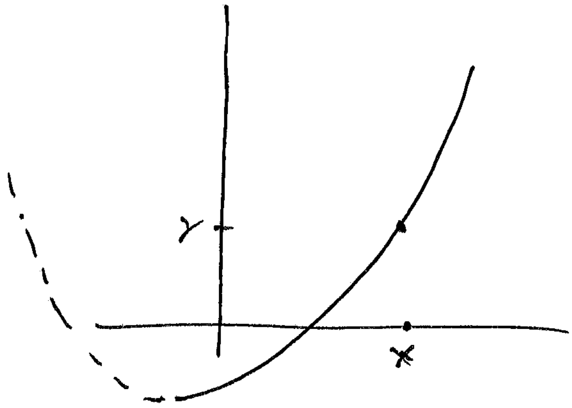
Eks. Vis at $f(x)\ e^x - 3\sqrt{x}$ har akkurat én løsning på intervallet $[1, 2]$.

$f(1) = e - 3 < 0$ $\quad f(2) = e^2 - 3\sqrt{2} > 0$, $f(x)$ kont. og deriverbar.

Ved skjæringssatsen finnes minst én løsning.

$f'(x) = e^x - \frac{3}{2\sqrt{x}} \geq e - \frac{3}{2} > 0$. $f(x)$ vokser på $[1, 2]$. Likningen $f(x) = 0$ kan ikke ha mer enn én løsning.

Inversfunksjoner

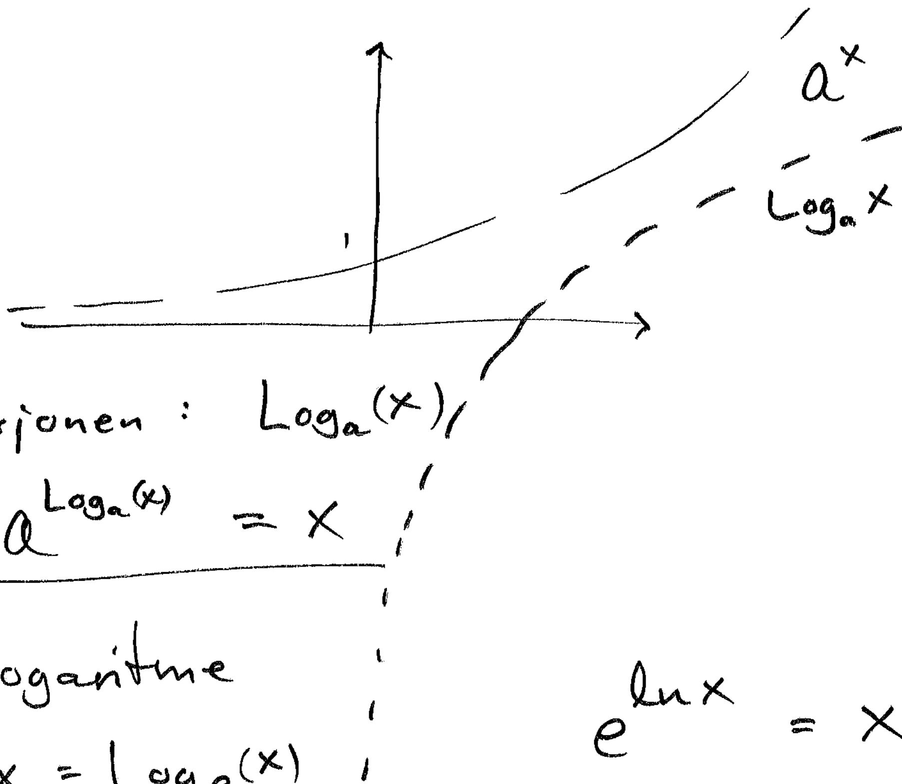


$f(x)$ er injektiv (en-til-en) hvis
$f(x) = f(y)$ fører til at $x = y$.

(Stigende / avtagende funksjoner er injektive
men injektive funksjoner trenger ikke være stigende/avtagende)

Hvis f er injektiv, da finnes det en inversfunksjon
f^{-1}. $\underline{f(f^{-1}(y)) = y}$.

Eksempler



inversfunksjonen : $\text{Log}_a(x)$,
$\underline{a^{\text{Log}_a(x)} = x}$

Naturlig logaritme
$\ln x = \text{Log}_e(x)$

$e^{\ln x} = x$.

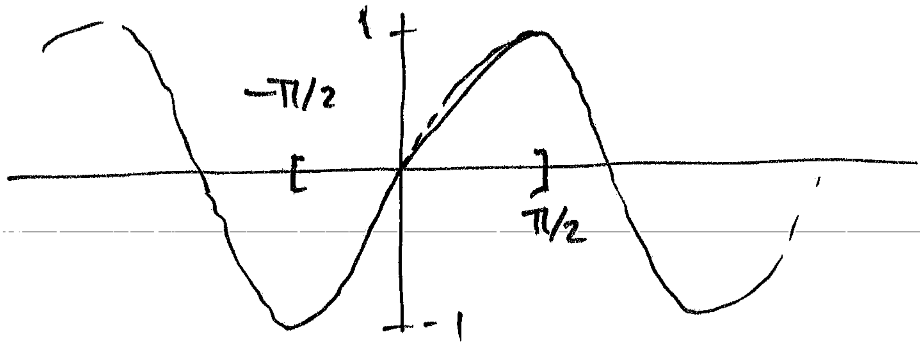
Logaritmereglene

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a^p) = p \ln a.$$

Sin x



sin x avgrenset til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ er injektiv.

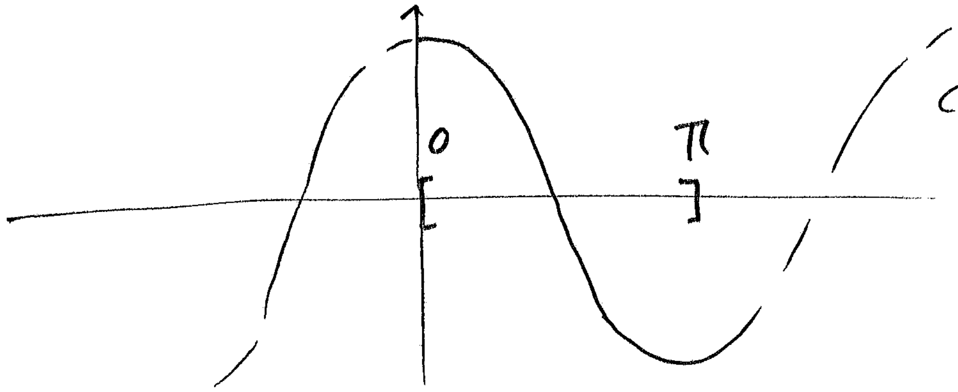
Inversfunksjonen er $\sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$

def. på $[-1, 1]$.

Verdimengden er $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\sin(\arcsin(x)) = x.$$

men $\arcsin(\sin(x))$ er bare lik x når $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$!



cos.

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{deriverer m.h.t } x:$$

$$\frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$f(x) = e^x, \qquad f^{-1}(x) = \ln x$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{(\ln x)}} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}}$$

$$f(x) = \sin x \qquad f^{-1}(x) = \arcsin x$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \tan x \qquad f^{-1}(x) = \arctan x$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

$$\ln(-x) \qquad x<0$$

$$\frac{d\ln(-x)}{dx} = \frac{1}{(-x)}\cdot(-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & x>0 \\ \ln(-x) & x<0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0.$$