Fredag
25 sep
2015

Derivasjonsoppgaver

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$ Finn $\frac{df}{dx}$ $(= f'(x))$

$= (x^7)^{1/3} = x^{7/3}$

Vi vet at $\frac{d}{dx} x^r = r \cdot x^{r-1}$ så

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} x^{7/3} = \frac{7}{3} x^{\frac{7}{3}-1} = \underline{\underline{\frac{7}{3} x^{4/3}}}$$

$$= \underline{\frac{7}{3} x \cdot \sqrt[3]{x}}$$

2) Deriver $g(x) = \frac{x+2}{x+3}$.

* Kvotientregelen : $\frac{(x+2)'(x+3) - (x+2)(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2}$

Alternativt :

* $g(x) = \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3}$.

$$\left(1 - \frac{1}{x+3}\right)' = 1' - \left((x+3)^{-1}\right)' = -(-1)(x+3)^{-2}(x+3)'$$

$$= \underline{\frac{1}{(x+3)^2}}$$

3) Deriver $h(x) = \frac{x^2-2x+1}{(x-1)}$

(hint : $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$)

$h(x) = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x - 1$

$h'(x) = \underline{1}$.

4) $f(x) = \frac{\ln(1/x)}{e^{x^3}}$ Finn $f'(x)$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x^{-1}) = -1\cdot\ln(x) = -\ln x$$

$$\frac{1}{e^{x^3}} = \left(e^{x^3}\right)^{-1} = e^{-x^3}$$

Så $f(x) = -\ln(x)\cdot e^{-x^3}$

$$f'(x) = -1\left(\underbrace{(\ln(x))'}_{\frac{1}{x}}\cdot e^{-x^3} + \ln(x)\underbrace{(e^{-x^3})'}_{e^{-x^3}(-x^3)'}\right)$$

$$f'(x) = -1\left(\frac{1}{x}\cdot e^{-x^3} + \ln x\cdot(-3x^2 e^{-x^3})\right)$$

$$= e^{-x^3}\left(-\frac{1}{x} + (+3)\cdot x^2\cdot\ln x\right)$$

$$= \underline{\frac{e^{-x^3}}{x}\left(-1 + 3x^3\ln(x)\right)}$$

5) $g(x) = \cos(2x) - 2\cos^2(x)$

Finn $g'(x)$

$$g'(x) = -2\underbrace{\sin(2x)}_{2\sin(x)\cdot\cos(x)} + 4\cos(x)\cdot\sin(x)$$

$$= 0$$

$$\left(\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\\ \cos(2x) - 2\cos^2 x &= -\sin^2 x - \cos^2 x\\ &= -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1\end{aligned}\right)$$

6) $h(x) = x^x \qquad x = e^{\ln x} \qquad x>0$

$= (e^{\ln x})^x = \underline{e^{x\ln x}}$

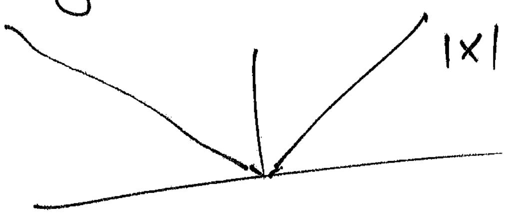
Finn $h'(x)$.

$(e^{x\ln x})' = e^{x\ln x} \cdot \underbrace{(x\cdot \ln(x))'}_{(x)'\cdot \ln(x) + x\cdot(\ln x)'}$

$\ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$\underline{h'(x) = x^x(\ln x + 1)}$

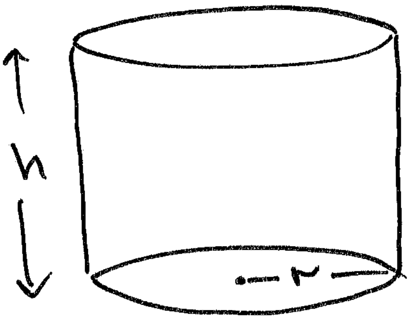
7) $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & x<0 \\ x & \geq 0 \end{cases}$



$f'(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$

f er ikkje deriverbar i $x=0$.

optimaliseringsproblemer



Volum $V = \pi r^2 \cdot h$ fast.

Hvilke forhold mellom r og h gir minst overflate areal? (Vise på tilfellenne med og uten lokk.)

overflateareal $A = 2\pi r \cdot h + \pi r^2 \cdot t$

$t = 1$ uten lokk

$t = 2$ med lokk (h størst)

V konstant så vi kan uttrykke h ved hjelp av r: $\underline{h = V/\pi r^2}$.

$$A(r) = 2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 \cdot t$$

$$= 2 \cdot V \cdot r^{-1} + \pi \cdot t \cdot r^2$$

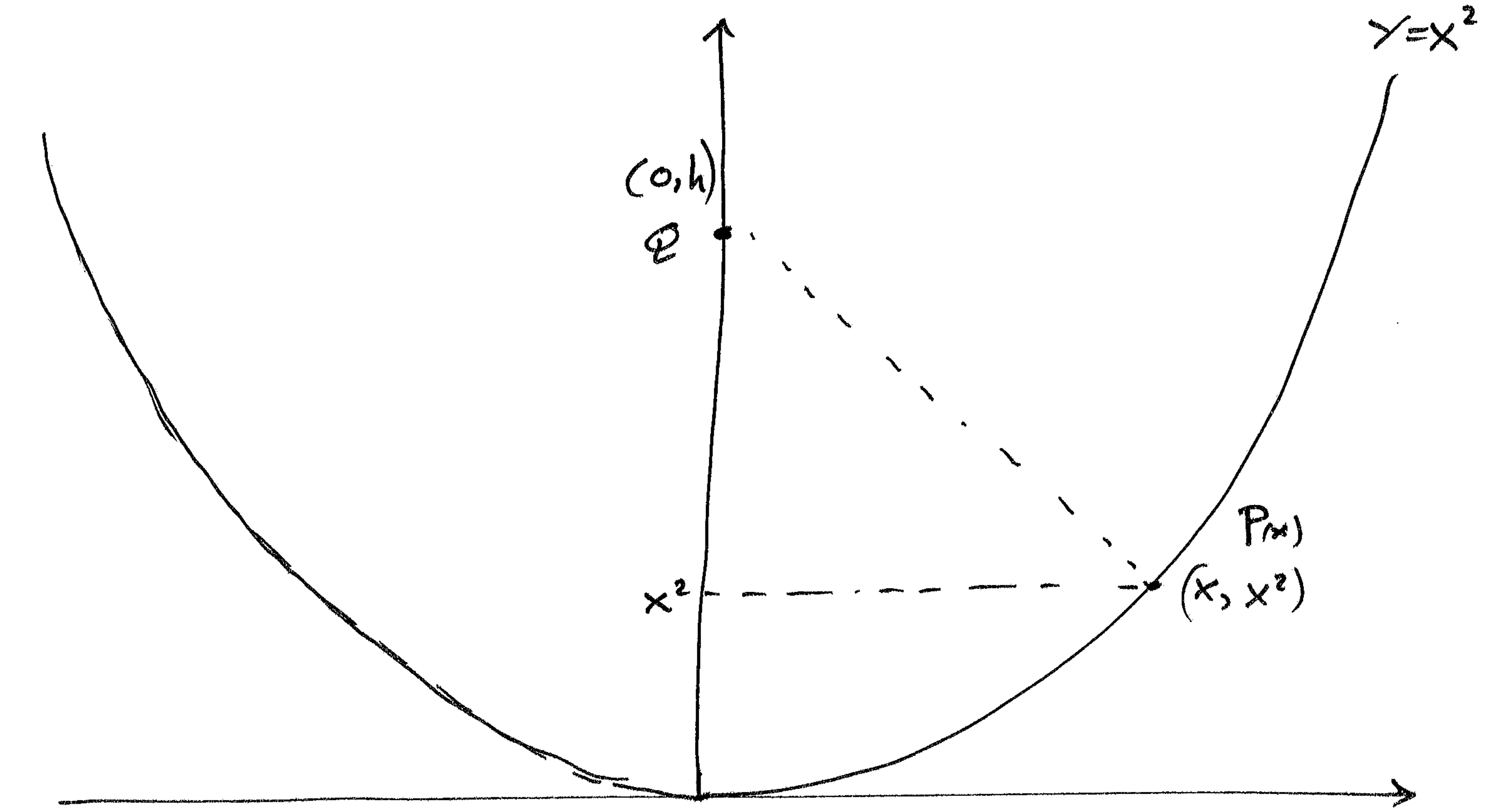
$$A'(r) = 2 \cdot V(-r^{-2}) + \pi \cdot t \cdot 2r$$

$$= \frac{2}{r^2}\left(-V + \pi \cdot t r^3\right)$$

$$= \frac{2}{r^2}\left(-\pi r^2 \cdot h + \pi \cdot t r^3\right) = \underline{2\pi(-h + t \cdot r)}$$

$A'(r) = 0$ når $-h + t \cdot r = 0$: $\underline{\frac{h}{r} = t}$

uten lokk: $h = r$, med lokk $h = 2 \cdot r$ diameter



Hvilke punkt på parabelen gitt ved $y=x^2$ er nærmest punktet $Q(0,h)$?

Avstanden mellom Q og $P(x)$:

$L^2(x) = x^2 + (x^2-h)^2$, $L(x) = \sqrt{x^2+(x^2-h)^2}$.

Vi ønsker å finne x s.a. $L(x)$ blir minst mulig

Det er når $L'(x) = 0 \iff (L^2(x))'$ ($L(x)>0$ så $L(x)>0$ for alle x)

$$(L^2(x))' = 2x + 2(x^2-h)(x^2-h)'$$
$$= 2x + 2(x^2-h)\cdot 2x$$
$$= 2x(1 + 2x^2 - 2h) = 0$$

$x=0$ eller $2x^2 = 2h-1$

$$x^2 = h - \tfrac{1}{2}.$$

Hvis $h<\frac{1}{2}$, da er $h-\frac{1}{2}<0$
så ingen (reell) løsning $x^2=h-\frac{1}{2}$.

så origo er nærmest $Q(0,h)$ når
$h < \frac{1}{2}$.

Hvis $h \geq \frac{1}{2}$, da har $x^2 = h - \frac{1}{2}$
løsningene $x = \sqrt{h - \frac{1}{2}}$
$\left(x = -\sqrt{h - \frac{1}{2}}\right)$

Avstanden fra Q til origo er h.
$\left(\sqrt{h - \frac{1}{2}}, h - \frac{1}{2}\right)$
er $\sqrt{\left(h - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$
$\sqrt{h - \frac{1}{4}}$

(Hvis $h = \frac{1}{2}$
så er avstanden fra
Q til origo
lik $\frac{1}{2}$)

Hvis $h > \frac{1}{2}$, da e
$\sqrt{h - \frac{1}{4}} < h$.

(Vi viser påstanden: dette er ekvivalent til
$h - \frac{1}{4} < h^2$
$0 < h^2 - h + \frac{1}{4}$
$0 < \left(h - \frac{1}{2}\right)^2$)

Hvis $h \geq \frac{1}{2}$ så er punktene
$\left(\pm\sqrt{h - \frac{1}{2}}, h - \frac{1}{2}\right)$ nærmest Q.