10.sep 2015

Determinanter

1

* $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Rekursiv beskrivelse. Lettest ved bruk av rad 2.

$$\det(A) = (-4)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= (-4)(8-(-9)) = -4 \cdot 17$$
$$= \underline{-68}$$

Bruk gjerne en kombinasjon av radoperasjoner og rekursiv beskrivelse av det.

* $$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} -2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

endrer ikke determinanten

$$\det(B) = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = \underline{-3}$$

②

Eksamen august 2014

Løser denne oppgave.

b) La D, E og F være tre $n \times n$ matriser. Løs følgende likning med hensyn på X

$$D(D+X) = E^2(X+F)$$

når det er kjent at matrisen $D - E^2$ er invertibel.

c) Gitt likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 &= 4 \\ ax_1 + ax_2 &= b\ , \end{aligned}$$

bestem parametrene a og b slik at systemet har

i) entydig løsning.
ii) uendelig mange løsninger.
iii) ingen løsning.

Oppgave 4

Vi har en transformasjon

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ .$$

Transformasjonen er en komposisjon av en forlengelse (multiplikasjon) med en faktor 2 som virker på vektoren $\mathbf{x}$, etterfulgt av en rotasjon med vinkelen $\frac{\pi}{2}$ mot urviseren. Angi standardmatrisen til transformasjonen.

Oppgave 5

Tabell 1: Data for vannstrøm

t (s)	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
ϕ (m^3/s)	1,64	1,94	2,30	2,71	3,21	3,79

a) Vi observerer vann som passerer et bestemt punkt. Tabell 1 viser strømningshastigheten til vannet, ϕ, når det passerer ved ulike tidspunkter, t. Med strømningshastighet mener vi hvor stort volum med vann som passerer punktet vi observerer per tidsenhet. Regn ut en tilnærmet verdi for endring per tidsenhet i strømingshastighet ved tida $t = 2$ s.

b) Regn ut den totale vannmengden som har passert mellom $t = 1,50$ s og $t = 4,00$ s.

Eksamen aug 2014

3c)

3

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ a & a \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ b \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2a - 6a = \underline{-4a}.$$

i) $a \neq 0$ alle b — én løsning ($\det A \neq 0$)

$a = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ b \end{bmatrix}$$

iii) (rad 2 : $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 = b$)

$\left.\begin{matrix} a = 0 \\ b \neq 0 \end{matrix}\right\}$ ingen løsning.

ii) $\left.\begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix}\right\}$ $2x_1 + 6x_2 = 4$

Uendelig mange løsninger. (en linje av løsninger).

Eksempel

(4)
$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}
$$

2×4 $\quad$ 4×1 $\quad$ 2×1

Gauss eliminasjon (av utvida matrise)

Bytter radene :
$$
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right] \; -2
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 5 \end{array}\right] \; (-1)
$$
trappeform

ledende element

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -5 \end{array}\right] \; 1
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -5 \end{array}\right]
$$
redusert trappeform.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 7x_4 &= -7 \\
x_3 - 6x_4 &= -5
\end{aligned}
$$

x_4 fri $\qquad x_3 = -5 + 6x_4 \; , \quad x_1 = -7 - 2x_2 + 7x_4$

x_2 fri $\qquad$ Løsningene parametrisert ved x_2 og x_4.

Løsningene er et plan i $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partikulær} \\ \text{løsning}}}{\begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} x_4}_{\text{homogene løsninger.}}$$

5

En løsning til $A\vec{x} = \vec{b}$ kalles en partikulær løsning.

En løsning til $A\vec{x} = \vec{0}$ kalles en homogen løsning.

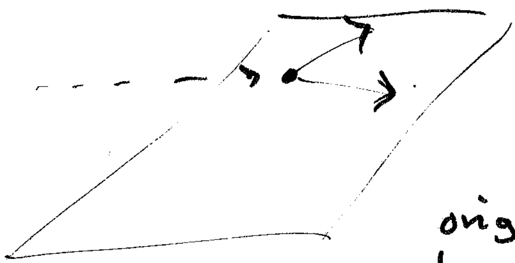
$\vec{x}$ og $\vec{y}$ løsninger til $A\vec{x} = \vec{b}$, $(A\vec{y} = \vec{b})$

da er $A(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$

så $\vec{x} - \vec{y}$ er en homogen løsning.

Hvis $\vec{z}$ er en homogen løsning og $\vec{y}$ en partikulær løsning, da er $\vec{y} + \vec{z}$ en partikulær løsning.

partikulær løsning



planet forskyvd så det går gjennom origo er de homogeneløsningene.

(6)

Flere egenskaper til determinanter

$$\det(A^T) = \det(A)$$ (opplagt for 2x2 matriser)

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$ (en del regning hvis vi sjekker dette for 2x2 matriser)

konsekvens: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$$A \cdot A^{-1} = 1_n$$

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(1_n) = 1$$

derfor er $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

(For bevis se lineær alg. notatet)

Kramers Regel

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

A $n \times n$ matrise
A inverterbar

La $A_i(\vec{v})$ være $n \times n$ matrisen vi får ved å shifte ut kolonne i i A med $\vec{v}$.

$$A = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n]$$

$$A_i(\vec{v}) = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{v}, u_{i+1}, \dots, u_n]$$

Kramers regel: $x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det(A)}$

(bevisskisse $\frac{\det A_i(\vec{b})}{\det(A)}$ gir riktig svar for $u_1, \dots u_n$ satt lik $\vec{b}$, funksjonen er lineær. Løsningene til likningssystemet er lineære i $\vec{b}$. Siden alle vektorer kan uttrykkes ved $u_1, \dots, u_n$ gir uttrykket løsningen til likningssystemet for alle $\vec{b}$)

En konsekvens av Kramers regel:

7 $$\mathrm{inv}(A) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)$$

($\mathrm{Adj}(A) = C^T$. Den adjungerte til A er den transponerte av kofaktormatrisen C)

bevis skisse: La $\vec{b}$ være $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$

$$A \cdot A^{-1} = 1_n = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$$

$(A^{-1})_{ij}$ er variabel i til løsningen: $A\vec{x} = \vec{e}_j$

Ved Kramers regel er det:

$$\frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & 0 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & \cdots & 1 & a_{ji+1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & 0 & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & \vdots\ 0 & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} M_{ji}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} C_{ji} = \frac{1}{\det A} (C^T)_{ij}$$

Derfor er $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T = \frac{1}{\det A} \mathrm{Adj}(A).$$

(Bevisene er ikke pensum. For mer detaljer se lineær algebra notatet lagt ut i uke 35.)

⑧ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A)$

Hvis A er en heltallsmatrise, da er $\operatorname{Adj}(A)$ også en heltallsmatrise.
(så $\det(A^{-1}) \cdot \det(A)$ er en heltallsmatrise hvis A er det.)

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}$$
$$= (7-10) + (-3)(4(-7))$$
$$= -3 - 3(-28) = -3(-28+1)$$
$$= 3\cdot(27) = \underline{81}$$

Minormatrisen:

$$M = \begin{bmatrix} -3 & -28 & 20 \\ -21 & -7 & 5 \\ 6 & 2 & -13 \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \right)$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 28 & 20 \\ 21 & -7 & -5 \\ 6 & -2 & -13 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^T = \underline{\frac{1}{81}\begin{bmatrix} -3 & 21 & 6 \\ 28 & -7 & -2 \\ 20 & -5 & -13 \end{bmatrix}}$$

De to neste sidene gir eksempler fra kretslære.

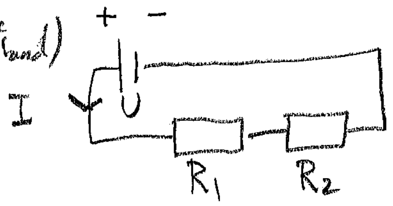
⑤ Kirchhoff's lover

- sum av spenning rundt en lukket krets er 0
- Sum av strøm i et forgreningspunkt er 0

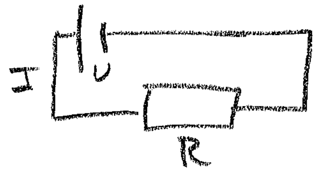
Ohm's lov $U = R I$ (U: spenning, I: strøm, R: resistanse (motstand))

Serie kobling

⑨



Hva må R være for å erstatte krets



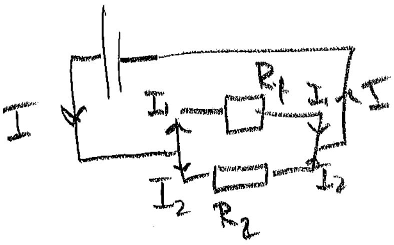
?

Spenning over en motstand R er $-I \cdot R$

$$-(I \cdot R_1 + I R_2) + U = 0$$

$$-I \cdot R + U = 0$$

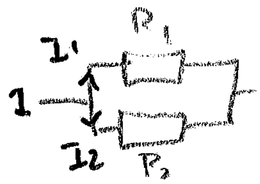
Så $R = R_1 + R_2$ seriekoblet



$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = U$$

$$I = I_1 + I_2$$

Parallellkobling



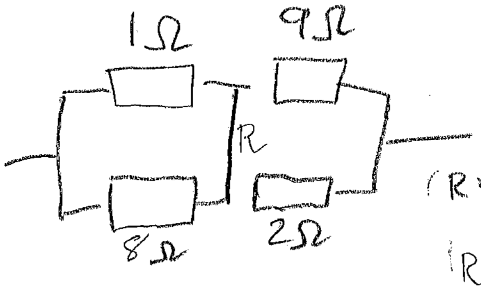
kan erstattes av en motstand

når $I \cdot R = U$ og $I = I_1 + I_2$

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Så $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$ så $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

(Hvis $R_1 = R_2$: $R = \frac{R_1}{2}$)



5Ω

(R=∞Ω)

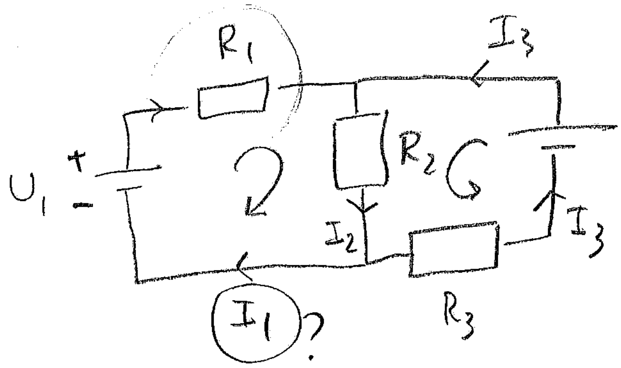
(R=0Ω) $\frac{8}{9} + \frac{18}{11} \approx 2{,}52\,\Omega$

Hva blir resultant motstanden uttrykt ved R (potmeter)

~~6~~

10

(Eksempel fra data 2010)
(Uke 35)



$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$I_1 + I_3 = I_2$$

$$U_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$$

$$U_2 - R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0$$

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)U_1 - R_2 U_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Kramers regel.

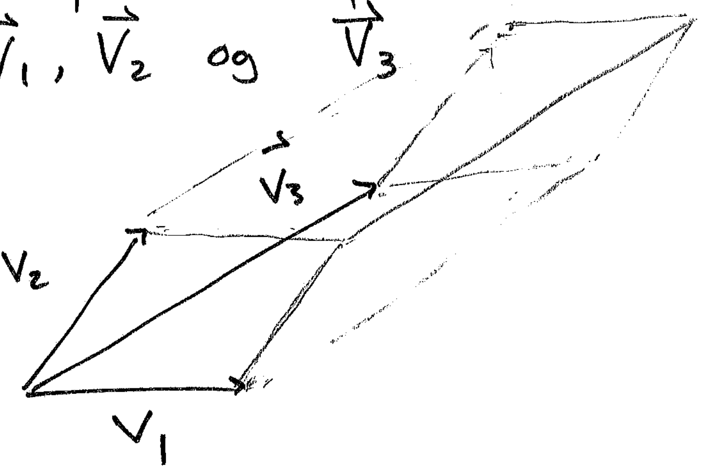
$$\frac{1}{\det(A)} \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ U_1 & R_2 & 0 \\ U_2 & R_2 & R_3 \end{pmatrix} = \frac{U_1 R_3 + U_1 R_2 - U_2 R_2}{1 \cdot R_1 R_2 + R_3(R_2 + R_1)}$$

Geometrisk fortolkning av determinanten av 3×3-matriser

$$A = \left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right]$$

$|\det A|$ = Volumet til parallellepipedet gitt ved $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ og $\vec{v}_3$

(det A kalles også Trippelprodukt)



Fortegnet til det A er gitt ved høyrehåndsregelen.
positivt hvis $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ og $\vec{v}_3$ er et høyrehåndsystem
negativt ellers.

Oppgave 6

Følgende matriser er gitt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \; .$$

Dersom noe av det vi ber deg regne ut nedenfor ikke er definert, skal du kort forklare hvorfor.

a) Regn ut $2A - 3B$, $2B - 3C$, BC og CB.

b) Finn A^{-1} og B^{-1}.
Bruk blant annet dette svaret til å finne matrisa X i likninga

$$AX + C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \; .$$

Eksamen mai 2014

c) Dette likningssystemet er gitt:

$$\begin{array}{rrrcl} & (a+2)\,x_2 + & 2\,x_3 & = & 2 \\ x_1 + & 2\,x_2 + & 3\,x_3 & = & 3 \\ 2\,x_1 + & 4\,x_2 + & (a+4)\,x_3 & = & b+1 \end{array} \; .$$

For hvilke verdier av a og b har ikke likningssystemet noen løsning (er inkonsistent)? For hvilke a og b har likningssystemet uendelig mange løsninger, og når har systemet nøyaktig én løsning?

Forsøk å løs 6c)

Oppgave 7

Det skal lages en bygning med horisontalt tak (og gulv) og rektangulære loddrette vegger. Tak og gulv er kvadratiske og bygningen skal romme 6.75 m^3. Utgiftene for å lage taket er 3 ganger så store per m^2 som utgiftene for å lage 1 m^2 av gulvet. Utgiftene til vegg og gulv er like store per m^2.

Finn lengde og bredde av en av veggene dersom utgiftene for å lage bygningen skal bli lavest mulig.

Oppgave 8

Finn den generelle løsninga av differensiallikninga

$$y'' + 6y' + 25y = 17e^{-2x} \; .$$

Her er en fin oppgave som en av dere studenter kom opp med:

Anta A er inverterbar. Hva er determinanten til kofaktormatrisen til A uttrykt ved det A?