# Lineær algebra

H. Fausk

09.03.2015

Andre utkast

Linære likningsystem lar seg løse ved bruk av de elementære regneartene. I prinsippet er det enkelt, men det blir fort veldig mange regneoperasjoner som må utføres når antall variabler økes. Vi går gjennom noen velletablerte fremgangsmåter for å løse slike likningssystemer på en oversiktlig måte. Disse metodene og begrepene rundt dem viser seg nyttig i andre sammenhenger enn bare for å løse likninger. Det mest fundamentalet begrepet er lineære avbildninger mellom lineære rom. I denne sammenheng vil et system av linære uttrykk svare til en linær avbildninge mellom to vektorrom med gitt basiser. Likningsystemet svarer til spørsmålet: hvilke vektorer sendes til en gitt vektor i målrommet?

En viktig del av teorien tar for seg vektorrom bestående av ulike klasser av funksjoner. Disse rommene er typisk ikke endeligdimensjonale og vi må også ta hensyn til at lineære avbildninger skal være kontinuerlige.

## 1 En linære likning

Et linært uttrykk er en endelig sum hvor hvert av leddene er en variabel ganget med en skalar[1]. For eksempel er $3x - 5y$ og $x - 2y/3 + \sqrt{2}z$ lineære uttrykk. En **linær likning** er på formen et lineært uttrykk satt lik en skalar. For eksempel er $2x - 3y = 4$ en lineær likning i de to variablene $x$ og $y$. Mens $x + y + z = 0$ er en linær likning i de tre variablene $x$, $y$ og $z$. Hvis vi har mange variabler er det hensiktsmessig å bare bruke ett symbol for listen av variabler, og heller nummerere de ulike variablene i listen. For eksempel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En lineær likning i disse variablene er

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Her er $a_1, \ldots, a_n$ **koeffisientene** til variablene og $b$ er verdien som vi krever uttrykket skal være lik. Legg merke til at $x$ og $a$ forekommer på samme måte, men $a$ og $x$ spiller forskjellige roller. Vi tenker på koeffisientene $a$ som gitte størrelser i hver likning og $x$ som variablene som vi ønsker å finne mulige verdier for (gitt en verdi av $b$). Her er summen skrevet opp ved bruk av summenotasjonen.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$$

Her har vi oppgitt hva ledd nummer $i$ skal være og hvilke indekser $i$ vi summerer over.[2]

[1] I andre sammenhenger er det vanlig å la et linært uttrykk være et polynom av grad 1 eller lavere. Det vil si at vi også tillater å legge til en skalar til et lineært uttrykk.

[2] Sigma $\sum$, er den greske bokstaven som svarer til vår (latinske) S. Brukt i summenotasjonen kalles den også summetegnet.

**Løsningen** til en linær likning i en variabel er alle verdier av variabelen som gjør påstanden i likningen sann. Løsningen kan enten bestå av akkurat ett tall, alle tallene eller det kan også henda at det finnes ingen tall som gjør likningen sann. I det sistnevnte tilfellet sier vi at løsningen er tom. Eksempler som realiserer disse tre tilfellene er

$$2x = 5 \qquad 0 \cdot x = 0 \qquad 0 \cdot x = 1$$

Løsningen til en lineær likning med to variabler er typisk en linje, men den kan også være hele planet eller tom.

Løsningen til en lineær likning med tre variabler er typisk et plan i rommet. Også her kan løsningen være hele rommet eller tom. Vi gir litt mer detaljer. La

$$ax + by + cz = e$$

være en lineær likning i de tre variablene $x, y$ og $z$. Løsningene er hele rommet hvis alle fire koeffisientene er lik 0. Hvis bare $e$ er forskjellig fra 0, er det ingen løsninger. Hvis derimot ikke alle $a, b$ og $c$ er lik null, da er løsningen planet som står vinkelrett på vektoren $[a, b, c]$, og som inneholder et punkt som svarer til en løsning til likningen. Anta $ax_0 + by_0 + cz_0 = e$ for et punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Da er $P = (x, y, z)$ en løsning til likningen bare hvis skalarproduktet mellom vektoren $[a, b, c]$ og vektoren fra $P_0$ til $P$ er lik 0. Så løsningene er alle punkt $P = (x, y, z)$ slik at vektoren fra $P_0$ til $P$ står vinkelrett på $[a, b, c]$.

**Oppgave 1** *Forklar hvordan alle linjer i xy-planet (også vertikale linjer ) er løsningen til en passende lineær likning i variablene $x$ og $y$.*

# 2 Linære likningssystem

Et **lineært likningssystem** består av en eller flere lineær likning i et sett av variabler. For eksempel er

$$x + y = 0 \qquad x - y = 2$$

et likningsstystem bestående av to likninger i to variabler. Et annet eksempel er likningssystemet

$$x - 2z/5 = 3/4 \qquad -y + 12z = 13$$

Her tenker vi da på begge likningene som likninger i de felles variablene $x, y$ og $z$. Utelatte forekomster av en variabel tenker vi på som 0 ganger variabelen. For eksempel er første likning lik $1 \cdot x + 0 \cdot y + (-2/5) \cdot z = 3/4$.

En løsning til et likningssystem er verdier til variablene som gjør påstanden i *alle* likningene sanne. Det første likningssystemet ovenfor har akkurat en løsning. Vi kan illustrere løsningen geometrisk som punktet hvor de to linjene beskrevet av hver av likningene møtes (bare der er begge likningene oppfylt). I dette eksempelet er det punktet $(x, y) = (1, -1)$. Den siste likningen har uendelig mange løsninger. Løsningene er linjen hvor de to planene beskrevet av likningene møtes.

**Oppgave 1** *Sjekk at løsningen til der andre likningssystemet består av alle punkt som ligger på er linjen som er parallell til vektoren* $[2/5, 12, 1]$ *og som går gjennom punktet* $(23/20, -1, 1)$.

Har vi to likninger med tre variabler, og løsningen til hver av likningene er plan som ikke er parallelle, så er løsningen linjen hvor de to planene møtes. Legger vi til en tredje likning vil løsningene være punktet hvor linjen snitter det tredje planet (hvis da linjen ikke ligger i det siste planet eller aldrig møter det).

Et likningssystem som har minst en løsning kalles for **konsistent**. Løsningsmengden til et konsistent likningssystem består enten av én løsning (et punkt) eller uendelig mange løsninger (linje, plan, rom, eller høyere dimensjonale varianter). Den kan ikke bestå av to punkt slik som for eksempel løsningen til en kvadratisk likning som $x^2 = 4$. Likningssystemet kalles **inkonsistent** hvis det ikke har noen løsninger.

Likningsystem med mange linkninger kan vi skrive opp som

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

hvor $i = 1, \ldots, m$ er de $m$ likningene. Her benytter vi en dobbel indeks på koeffisientene. Den første indeksen sier hvilke likning den tilhører og den andre indeksen hvilke variabel den er koeffisienten til.

Det er vanlig å skrive opp alle disse koeffisientene i en rektangulær **matrise**[3]. Denne matrisen kalles gjerne koeffisientmatrisen.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Dette er en $m \times n$ matrise. Matrisen består av $m \cdot n$ **elementer** $a_{i,j}$. Matrisen med koeffisienter til et likningssystem (med en gitt rekkefølge på variablene og likningene) kalles gjerne koeffisientmatrisen.

En $1 \times n$-matrise kalles en **radvektor** av lengde $n$. Den er en horisontall listing av $n$ elementer fra venstre til høyre. En $m \times 1$-matrise kalles en **kolonnevektor** (**søylevektor**). Den er en vertikal listing av $m$ elementer ovenfra og ned. I en $m \times n$-matrise er det $m$ rader og $n$ kolonner (også kaldt søyler). På engelsk kalles de henholdsvis "row and column". Matrisen av koeffisienter hjelper oss å holde orden på koeffisientene og den lar oss slippe å skrive opp variablene gjentatte ganger. Posisjonen til et element sier hvilken likning og hvilken variabel det tilhører. Elementet i posisjon $i, j$ tilhører likning nummer $i$ og variable nummer $j$. For å beskrive et likningssystem er det og nødvendig å ta med skalarene som de lineære utrykkene skal være lik. Vi samler disse skalarene i en kolonnevektor. Den **utvida matrisen** (hele matrisen) til likninssystemet er koeffisientmatrisen sammen med denne kolonnevektoren. Det kan være til hjelpe å lage et skille mellom koeffisientene og denne vektoren, for eksempel ved en vertikal linje slik som her.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right]$$

**Oppgave 2** *Skriv opp koeffisient matrisen og den utvida matrisen til de to likningssystemene ovenfor.*

[3]Sjekk etymologien for ordet og les om historien til bruken av matriser.

## 3 Radopersjoner

Skalere vi en likning med en skalar ulik 0 endrer vi ikke løsningsmengden til likningen. Bytter om på rekkefølgen av likningene eller legger en likning til en annen likning i et likningsystem så endrer vi ikke på løsningsmengden til likningssystemet.

**Oppgave 3** *Vis påstandene ovenfor.*

De følgende tre operasjonene på matriser kalles **radoperasjoner**.

1. Bytte om to rader
2. Gange en rad med en skalar ulik 0
3. Legge en rad, ganget med en skalar, til en annen rad

Løsningsmengden til en utvida matrise (tilordna et likningssystem) forblir uendra om vi utfører radoperasjoner på denne matrisen. To matriser kalles **radekvivalente matriser** (eller bare ekvivalente) hvis vi kan starte med den ene matrisen og utføre radoperasjoner til vi får den andre matrisen. Symbolet tilde $\sim$ brukes for å angi at to matriser er radekvivalente.

**Oppgave 4** *Vis at hvis vi kan utføre radoperasjoner på en matrise* $\mathbf{A}$ *og få en matrise* $\mathbf{B}$*, da kan vi utføre radoperasjoner på matrisen* $\mathbf{B}$ *slik at vi får matrisen* $\mathbf{A}$*.*

La oss starter med et likningsystem som er så enkelt at det faktisk bare oppgir hva løsningen skal være. Ved å utføre radoperasjoner kan vi da lage et likningssystem med de samme løsningene, men hvor det ikke er opplagt ved å se på likningene. For eksempel har følgende to likningssystem

$$\begin{array}{cccccc} x & & & = & 2 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 3 \end{array}$$

og

$$\begin{array}{cccccc} 2x & +3y & +5z & = & 25 \\ 2x & +9y & -10z & = & -8 \\ & -6y & +5z & = & 3 \end{array}$$

samme løsning. Det siste likingssystemet fremkommer fra det første ved bruk av radoperasjoner.

En taktikk for å løse et likningsystem, hvor de ulike variablene er "mikset sammen" og forekommer i flere likninger, er å benytte radoperasjoner til å "nøste opp liknigene" til vi får en beskrivelse hvor vi lett kan lese av løsningene.

Vi viser detaljert hvordan dette kan gjøres med eksempelet ovenfor. Den utvida koeffisientmatrisen til likningssystemet er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 25 \\ 2 & 9 & -10 & -8 \\ 0 & -6 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

Legger vi til $-1$ ganget med første rad til rad 2 får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 25 \\ 0 & 6 & -15 & -33 \\ 0 & -6 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

Tar vi nå rad 2 og legger til rad 3 får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 25 \\ 0 & 6 & -15 & -33 \\ 0 & 0 & -10 & -30 \end{array}\right]$$

Dette er eksempel på en matrise på **trappeform**. Vi kan nå løse likningssystemet som følger: Den tredje raden gir at $z = 3$. Den andre raden, hvor vi setter inn verdien for $z$, gir at $6y = -33 + 15z = -33 + 45 = 12$. Derfor er $y = 2$. Den første raden gir $2x = 25 - 3y - 5z = 25 - 6 - 15 = 4$. Derfor er $x = 2$.

Vi kan også utføre flere radoperasjoner slik at vi får den utvida matrisen på en enda enklere form. Vi kan da lese av løsnigene mer direkte. Ganger vi rad 3 med $-1/10$ og rad to med $1/3$ får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Vi legger nå til 5 kopier av rad 3 til rad 2. Til rad 1 legger vi til rad 3 ganget med $-5$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Vi ganger nå rad 2 med $1/2$ og deretter legger vi til $-3$ ganget med rad 2 til rad 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Til sist ganger vi rad 1 med $1/2$ og vi får den opprinnelige matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

som angir verdiene til de tre variablene. Dette er eksempel på en matrise på **redusert trappeform**.

Her er et lignende eksempel hvor det er uendelig mange løsninger (en linje). La de tre variablene være $x$, $y$ og $z$ og la likningssystemet være gitt ved følgende utvida matrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Likningsystemet har uendelig mange løsninger. For hver verdi av $z$ så får vi akkurat en verdi for $x$ og for $y$. Vi kan parametrisere løsningene (løsningsmengden) ved variabelen $z$ som følger. Løsningene består av alle punkt $(x, y, z)$ slik at $x = -3 + 4z$, $y = 1 - 2z$ for alle mulige verdier av variablene $z$. Vi kunne, i dette tilfellet, alternativt ha parametrisert ved en av de andre variablene, eller ved en annen parameter som ikke er en av variablene.

**Oppgave 5** *a) Parametriser løsningen til likningen ovenfor ved hjelp av variabelen $x$*

*b) Parametriser løsningen til likningen ovenfor ved hjelp av variabelen $y$*

*c) Vis at*

$$(1 - 4a, a - 1, 1 - a)$$

*for alle $a$ er en parametrisering av alle løsningene til likningen.*

**Oppgave 6** *Lag en likning i to variabler slik at løsningsmengden kan parametriseres ved hjelp av $x$ men ikke ved hjelp av variabelen $y$.*

Her var likningene "løst opp" slik at det var enkelt å lese av løsningene. Følgende likningssystem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

er en mer "sammenblandet" versjon hvor vi har benyttet radoperasjoner. Det nye likningssystemet har derfor samme løsningsmengde som tidligere, men det er ikke like lett å se fra likningssystemet.

Vi utfører radoperasjoner for i størs mulig grad "løse opp" likningssystemet. Først tar vi å bytter de to radene og deretter tar vi $-2$ ganger det som nå er første rad og legger til andre rad

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Dette er en matrise på trappeform. Vi kan nå, for eksempel, bruke likning 2 til å uttrykke $y$ ved hjelp av $z$. Deretter kan vi sette inn for $y$ i likning 1 og uttrykke $x$ ved hjelp av $z$.

Vi kan forenkle likningssystemet mer. Vi kan gjøre dette ved legge til 2 ganger rad 2 til rad 1. Vi ganger deretter rad 2 med $-1$ for å få koeffisienten til $y$ til å bli 1. Resultatet er

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Dette er en matrise på redusert trappeform. Matrisen er den vi startet med i dette eksempelet.

En matrise $\mathbf{A}$ er på **trappeform** hvis den har egenskapen at alle rader bestående av nullelementer er neders i matrisen og posisjonen til det første ikke-null elementet i radene (som ikke bare består av null-elementer) er en ekte økende funksjon på radenummeret. De første ikke-null elementet i radene kalles de **ledende** elementene. En matrise er på **redusert trappeform** hvis den er på trappeform og alle ledende elementer er lik 1 samt at de ledende elementene er de eneste elementene ulik 0 i sine kolonner.

**Oppgave 7** *Er det sant at alle matriser* $\mathbf{A}$ *er på trappeform hvis følgende egenskap er sann: For alle elementer* $a_{i,j}$ *som er det elementet lengst til venstre i sin rad ulik 0, så er* $a_{k,l} = 0$ *for* $k > i$ *og* $l \leq j$*?*

Prosdyren vi har vist i de to eksemplene ovenfor kan utføres på alle matriser. Alle matriser er ekvivalent til en matrise på trappeform (bytt rader slik at ingen andre rader har elementer ulik 0 lengre til venstre for det første elementet ulik 0 i første rad. Arbeid deg rekursivt nedover radene). Videre fra en trappeform kan vi finne en ekvivalent matrise på redusert trappeform (arbeid deg oppover radene). Det finnes bare en matrise på redusert trappeform som er ekvivalent til en gitt matrise. Vi sier at den er **entydig** bestemt av matrisen.

Prosedyren som leder frem til en matrise på trappeform (og videre til redusert trappeform) kalles **Gauss-eliminasjon**.

**Oppgave 8** *Skriv opp de utvida matrisene til de to likningssystemene nedenfor. Benytt Gauss-eliminasjon og finn de ekvivalente matrisene på redusert trappeform. Benytt dem til å beskrive alle løsningene (hvis det er løsninger).*

$$\begin{array}{rrcr} 2x & -3y & = & 4 \\ 6x & -7y & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -3y & -z & = & 0 \\ 6x & -7y & +z & = & 1 \end{array}$$

Vi sier at radvektorene i en matriser er **lineært uavhengige** hvis matrisen er ekvivalent til en matriser på redusert trappeform uten rader med bare 0-elementer. Hver rad med bare null-elementer svarer til en rad som kan skrives som en lineær kombinasjon av de andre radene.

En $m \times n$-matrise må ha minst $m - n$ rader med bare null-elementer når $m > n$. Derfor kan ikke radvektorenen være lineært uavhengige. Minst $m - n$ av dem kan skrives som en lineær kombinasjon av de andre radene.

**Oppgave 9 (Krevende)** *Lag overslag på maksimalt antall multiplikasjonsoperasjoner (av elementer) som behøvs for å utføre de Gauss-eliminasjon fra en generell* $m \times n$*-matrise til en ekvivalent matrise på trappeform, og deretter fra en matrise på trappeform til en matrise på redusert trappeform.*

*Hint: Det kan være nyttig å benytte følgende*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

# 4 Matrisealgebra

To matriser med samme dimensjoner kan legges sammen ved at vi legger de sammen elementvis. Vi kan også skalarmultiplisere dem ved å utføre skalarmultiplikasjonen elementvis. Spesielt anvendt på kolonne- og rad-vektorer får vi addisjon og skalarmultiplikasjon av vektorer. La oss nå betrakte kolonnevektorer av lengde $n$. Vektoren $\mathbf{e}_i$ er kolonnevektoren som har alle elementer lik 0, bortsett fra elementet i posisjon $i$, som er lik 1. En vilkårlig kolonnevektore kan entydig uttrykkes som en lineær kombinasjon av disse vektorene.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

Vi kaller vektorene $\mathbf{e}_i$ standart basisvektorer.

Multiplikasjon av matriser er definert slik at produktet av koeffisientmatrisen og søylevektoren med variablene, gir søylevektoren hvor elementene er de linære uttrykkene. For eksempel

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y \\ a_{2,1}\,x + a_{2,2}\,y \end{bmatrix}$$

Matriseprodukt er bare definert mellom en $m \times k$ og en $k \times n$-matrise (ganget fra høyre). Resultatet er da en $m \times n$-matrise og element $i, j$ er definert som skalarproduktet av $i$-te radvektor til den første matrisen og $j$-te kolonnevektor til matrisen lengset til høyre. For eksempel er produktet

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 5 & -2 \\ -7 & -5 & 8 & -6 \\ -5 & 0 & 15 & -10 \end{bmatrix}$$

**Oppgave 10** *Regn ut produktet*

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Oppgave 11** *Vis at resultatet av å utføre radoperasjoner på et produkt av to matriser $A \cdot B$ er det samme som om vi først utfører radoperasjonene på $A$ og deretter ganget med $B$ fra høyre.*

Produktet er assosiativt det vil si at $(A \cdot B) \cdot C$ er lik $A \cdot (B \cdot C)$. Multiplikasjonen er distributiv over addisjonen (vi kan gange ut parenteser). Produktet er derimot ikke kommutativt så rekkefølgen er av betydning. For eksempel så er

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimensjonen til matrisene trenger ikke en gang være den samme for $AB$ og $BA$. For eksempel er

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = [10]$$

Det kan og være at $AB$ er definert men at $BA$ ikke er definert.

**Nullmatrisen 0** av dimensjon $m \times n$ er matrisen av denne dimensjon hvor alle elementene er lik 0. (Vi spesifiserer ikke dimensjonen.) Produktet av to tall ulik 0 er alltid ulik 0, men produkt av to matriser forskjellig fra null-matrisen kan godt bli lik null-matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Samlingen $M_n$ av $n \times n$-matriser er en algebra.

# 5 Inversmatriser

En **kvadratisk matrise** er en matrise med like mange rader som kolonner. Alternativt snakker vi om en $n \times n$-matrise, uten å spesifisere hva $n$ skal være. Elementene i posisjon $(i, i)$ i en kvadratisk matrise, for ulike verdier av $i$, kalles for **diagonalelementene** til matrisen. **Identitetsmatrisen** $\mathbf{1}_n$ av dimensjon $n$ er den kvadratiske matrisen av dimensjon $n \times n$ slik at alle de diagonale elementene er lik 1 og alle andre elementer er lik 0.

$$\mathbf{1_1} = [1] \quad \mathbf{1_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{1_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrisene $\mathbf{1_n}$ er på redusert trappeform. En $n \times n$-matrise har lineært uavhengige vektorer presis når matrisen er ekvivalent til $\mathbf{1_n}$.

Hvis $\mathbf{A}$ er en $m \times n$-matrise, da er

$$\mathbf{1_m} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{og} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{1_n} = \mathbf{A}$$

En $n \times n$-matrise $\mathbf{A}$ er invertibel hvis det finnes en matrise $\mathbf{B}$ slik at

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{1}_n \quad \text{og} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}_n$$

Hvis det finnes en matrise $B$ med disse egenskapene er den bestemt av $A$. Vi kaller den inversmatrisen til $A$ og skriver den som $A^{-1}$.

Anta at $A$ er en kvadratisk matrise ekvivalent til identitetsmatrisen. Utfører vi de samme radoperasjoner på begge sider av likheten

$$Ax = b = \mathbf{1}_n b$$

helt til $A$ gjøres om til $\mathbf{1}_n$ får vi $x = Bb$ hvor $B$ er resultatet av å utføre radoperasjonene på $\mathbf{1}_n$. Vi får derfor $Ax = ABb = b$ for alle mulige $b$. Spesielt er dette sant for basisvektorene $\mathbf{e_i}$ fra $i = 1$ til $i = n$. Derfor får vi likheten $AB = \mathbf{1}_n$. Tilsvarende er $BA = \mathbf{1}_n$. Matrisen $B$ er derfor inversmatrisen til $A$. En fremgangsmåte for å finne inversmatrisen til en kvadratisk matrise $A$ (hvis det er mulig) er derfor som følger: Sett opp en $n \times 2n$ matrise ved å sette sammen $A$ og identitetsmatrisen $\mathbf{1}_n$ som $[A|\mathbf{1}_n]$. Utfør radoperasjon for å føre $A$ over til redusert trappeform. Hvis $A$ har lineært uavhengige radvektorerer ender vi da opp med $\mathbf{1}_n$ i stede for $A$. Resultatet av radoperasjonene på $\mathbf{1}_n$ er inversmatrisen $A^{-1}$. Vi ender altså opp med $[\mathbf{1}_n|A^{-1}]$. Hvis den reduserte trappeformen ikke er identitetsmatrisen så er ikke $A$ inverterbar.

**Oppgave 12** *Utfør denne prosedyren for en generell $2 \times 2$-matrise $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Sjekk svaret ved å gange sammen matrisen med sin inversmatrise (prøv begge sider) når matrisen har inversmatrise.*

**Oppgave 13** *Undersøk om matrisene*

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -15 \\ 8 & 40 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

*har inversmatriser og finn de som eksisterer.*

# 6 Transponert til en matrise

Den **transponerte** til en $m \times n$-matrise er $n \times m$-matrise hvor søylevektorene er gjort om til radvektorer. Vi skriver den transponerte til $A$ som $A^T$. Elementet $i, j$ i $A^T$ er lik elementet $j, i$ i $A$. Hvis vi transponerer en matrise to ganger får vi den opprinnelige matrisen tilbake igjen. En kvadratisk matrise kalles **symmetrisk** hvis den er lik sin egen transponerte. Dette er det samme som at elementet $a_{i,j}$ er lik elementet $a_{j,i}$ for alle $i$ og $j$. Matrisen er **antisymmetrisk** (skjevsymmetrisk) hvis den er lik $-1$ ganger sin transponerte.

**Oppgave 2** *Vis at*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

*for alle matriser $A$ og $B$ slik at produktet $AB$ er definert. Dette sier at den transponerte av et produkt av to matriser er lik produktet av de transponerte matrisene ganget sammen i motsatt rekkefølge.*

**Oppgave 14** *Likningssystemet $Ax = b$ er ekvivalent til $x^T A^T = b^T$. Fortolk dette.*

En kvadratisk matrise er **øvre triangulær** hvis alle elementer ulik null er på eller ovenfor diagonalen til matrisen. En kvadratisk matrise er **nedre triangulær** hvis alle elementer ulik null er på eller nedenfor diagonalen til matrisen. En matrise er derfor øvre traingulær er derfor det samme som at den transponerte til matrisa er nedre triangulær. En fellesbetegnelse er for de to typene matriser er **triangulær** matrise. En kvadratisk matrise på trappeform er alltid en øvre triangulær matrise. Hvis alle diagonalelementen til en $n \times n$-matrise på trappeform er forskjellig fra null så har matrisen på trappeform $n$ ledende elementer.

# 7 Determinanter

Det kan være nyttig å regne eksplisitt på determinanter for $2 \times 2$ matriser før du går gjennom den mer abstrakte teorien i denne delen. Vi definerer

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

**Oppgave 3** *Sjekk at determinanten er lineær i hver av de to radene og i hver av de to søylene (respekterer sum og skalarmultiplikasjon). Sjekk at determinanten er uendret under transponering. At determinanten til et produkt av to $2 \times 2$-matriser er produktet av determinanten til de to matrisene. Vider sjekk at determinanten skifter fortegn hvis de to raden bytter plass eller hvis de to kolonnene bytter plass.*

Vi skal nå se på funksjoner som tilordner en skalar til $n$ vektorer av lengde $n$. Vi krever at funksjonen skal være lineær i hver vektor-variabel. Videre ser vi på funksjoner med egenskapen at bytter vi om to av vektorene så skal funksjonen skifte fortegn. Vi sier gjerne at funksjonen er antisymmetrisk. Det viser seg at slike funksjoner er entydig bestemt opp til å gange dem med en konstant. Hvis vi krever at funksjonen på vektorene $e_1, \ldots, e_n$ skal gi verdien 1 så er det akkurat en funksjon med disse egenskapene. Vi ordner de $n$ vektorene i en matrise. La oss kalle den for $A$. Om vektorene er søyle eller radvektorer spiller ingen rolle. Funksjonen blir den samme.

Denne funksjonen kalles **determinanten** til $n \times n$ matrisen. Vi skriver gjerne dette som $\det(A)$ eller av og til den mer slumsete notasjonen $|A|$. Sistnevnte bør ikke brukes sammen med absoluttverdien til determinanten.

Determinanten $\det(A)$ er ved lineæritet lik summen over hver av variablene $i_1, \ldots i_n$ fra 1 til $n$. (Dette er en sum med $n^n$ ledd.)

$$a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n} \det(e_{i_1} \ldots e_{i_n})$$

Vi får bare bidrag når alle $i_1, \ldots i_n$ er forskjellige fra hverandre. Har vi to like vektorer i determinanten så må den være lik sin egen additive invers, og derfor lik 0. Grunnen til det er at determinanten skifter fortegn hvis vi bytter de to vektorene, men siden vektorene er like forblir determinanten uendra under ombytte.

**Oppgave 4** *Vis at en diagonal matrise har determinant lik produktet av alle diagonalelementene.*

Permutasjoner av $n$ element er omstokkinger av de $n$ elementene til en annen rekkefølge. La $s$ være en slik omstokking og la $s(1), s(2), \ldots, s(n)$ være rekkefølgen som $1, 2, \ldots, n$ er byttet om til. For eksempel er permutasjonene av $1, 2$ identitetspermutasjonen (som ikke bytter noen tall) og permutasjonen $(2, 1)$ som bytter to tall. Permutasjonene til $1, 2, 3$ er

$$(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$$

og

$$(2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2)$$

De tre først er jevne permutasjoner (et jevn antall bytte av elementer fra det opprinnelige). De tre siste er odde permutasjoner (et odde antall bytte av elementer fra det opprinnelige oppsettet). Generelt er det $n!$ forskjellige permutasjoner av $n$ elementer.

Vi trenger bare ta med ledd i summen for determinanten hvor $i_1, \ldots, i_n$ er forskjellige. Determinanten er derfor lik summen over

$$a_{1,s(1)} \cdots a_{n,s(n)} \det(e_{s(1)} \ldots e_{s(n)})$$

for alle permutasjoner $s$. Determinanten $\det(e_{s(1)} \ldots e_{s(n)})$ er 1 hvis permutasjonen er jevn og $-1$ hvis permutasjonen er odde. Vi skriver gjerne dette fortegnet som $(-1)^s$. Derfor er determinanten summen over de $n!$ leddene

$$(-1)^s a_{1,s(1)} \cdots a_{n,s(n)}$$

for alle permutasjoner $s$.

Samme argument med radvektorer i stede for søylevektorer gir akkuratt samme funksjon (når rekkefølgen på vektorene opprettholdes: venstre mot høyre eller ovenfra og ned.) Å skifte vektorene fra rad til søyle vektorer svarer til å transponere matrisen med vektorene. Derfor har vi

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Utfører vi radoperasjoner på en matrise vil determinanten til matrisen endre seg som følger:

1. Legger vi en skalar ganget med en rad til en annen rad så endres ikke determinanten.

2. Ganger vi en rad med en skalar $c$ så er determinanten til den nye matrisen $c$ ganget med determinanten til den gamle

3. Bytter vi om to rader så skifter determinanten fortegn

Hvis en matrise er triangulær så er determinanten til matrisen lik produktet av diagonalelementene. En prosedyre for å finne determinanter er derfor å utføre radoperasjoner til matrisen overføres til en ekvivalent matrise på triangulær form.

Dette krever omlag $n^3$ multiplikasjonsoperasjoner. Den rekursive definisjonen av determinanter krever $n!$ regneoperasjoner.

Determinanten til en matrise er 0 hvis de $n$ radvektorene (eller ekvivalent søylevektorene) ikke er lineært uavhengige og ulik 0 hvis de er linært uavhengige.

Vi skal nå forklare hvorfor determinanten til et produkt av to kvadratiske matriser er produktet av determinanten til hver av dem

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Argumenet går ut på observere at for en fast $B$ er $\det(AB)$ en funksjon som tar inn $n$ radvektorer og gir ut en skalar. Funksjonen er lineær i hver av radvektorene samt antisymmetrisk. Den er derfor lik $\det(A)$ ganget med verdien til identitetsmatrisen. Når $A$ er identitetsmatrisen er $\det(AB) = \det(\mathbf{1}_n B) = \det(B)$. Derfor er $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Spesielt har vi at

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(\mathbf{1}_n) = 1$$

så $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

## 8 Kramers regel

Anta at $\det(A) \neq 0$ så søylevektorene (og radvektorene) i matrisen er lineært uavhengige. Det finnes da, for all vektorer $b$, en entydig løsningsvektor $x$ av likningssystemet

$$Ax = b.$$

Løsningen $x$ er en lineær funksjon i $b$. Siden $Ae_i$ er lik den $i$-te kolonnen $K_i$ til $A$ så er $x_j(K_i)$ lik 1 hvis $i = j$ og 0 ellers. Vi beskriver en lineær funksjon med disse egenskapene ved hjelp av determinanter. La $A_j(b)$ være determinanten til $n \times n$ matrisen vi får ved å erstatte kolonne $i$ med kolonnevektoren $b$. Da har vi at $A_j(K_i)$ er lik $\det(A)$ hvis $i = j$ og null ellers (siden vi da får to identiske kolonner). Derfor får vi følgende resultat, som kalles **Kramers regel**,

$$x_i(b) = \frac{A_i(b)}{\det(A)}$$

Som en konsekvens kan vi finne en beskrivelse av inversmatrisen til en kvadratisk matrise med determinant ulik 0 beskrevet ved minorer og determinanten til matrisen.

Siden $AA^{-1} = \mathbf{1}_n = [e_1, \ldots, e_n]$ så er $j$te rad til $A^{-1}$ løsningen til linkningssystemet

$$Ax = e_j$$

Fra Kramers regel er derfor elementet

$$(A^{-1})_{i,j} = \frac{A_i(e_j)}{\det(A)}$$

Determinanten $A_i(e_j)$ er lik determinanten til matrisen hvor $i$-te faktor er erstattet av $e_j$ og hvor $j$-te rad er lik $e_i$ (benytt kolonneoperasjoner til å finne en matrise med samme determinant hvor hver av de andre ellementene i raden alle er lik 0). Vi kan forflytte rad $j$ opptil første rad og deretter $j$-te kolonne frem til første kolonne. Dette krever $i + j$ radoperasjoner. Determinanten til denne matrisen er lik $i, i$-minoren til matrisen. Siden vi har benyttet $1 + j$ radoperasjoner er determinanten $A_i(e_j)$ er lik cofaktoren $C_{j,i}$, som er lik elementet $i, j$ til den adungerte matrisen $\operatorname{adj}(A)$. Derfor er

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}$$

Vi har derfor at en kvadratisk matrise $A$ har en inversmatrise hvis og bare hvis determinanten $\det(A)$ er ulik 0.

Denne eksplisitte formelen for inversmatrisen er ikke en effektiv måte å finne inversmatrisen til store matriser.

Sjekk at dette gir

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

**Oppgave 15** *Vis at inversmatrisen til en inverterbar matrise med rasjonale elementer er igjen en matrise med rasjonale elementer. Vis videre at hvis $r$ er en felles faktor for alle elementene i matrisen da er*

$$r^n \det(A)\, A^{-1}$$

*en matrise hvor alle elementene er heltall.*

# 9 Lineære transformasjoner

Vi skal nå fortolke $m \times n$-matriser som en funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$. En $m \times n$-matrise $\mathbf{M}$ definerer en funksjoner ved å sende $n$-vektoren $\mathbf{x}$ til $m$-vektoren $\mathbf{Mx}$. Denne funksjonen har egenskapen at den respekterer både addisjon og skalarmultiplikasjon i de to vektorrommene.

$$\mathbf{M}c\mathbf{x} = c\mathbf{Mx} \qquad \mathbf{M}(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}) = \mathbf{Mx_1} + \mathbf{Mx_2}$$

En funksjon mellom vektorrom med disse to egenskapene kalles en **lineær transformasjon**. Faktisk er alle lineære transformasjoner mellom (endeligdimensjonale) vektorrom (med en valgt basis, slik at vektorene kan beskrives med koordianter) gitt ved en matrise. Vi viser dette nå. Vi minner om at $\mathbf{e}_i$ er vektoren som har alle elementer lik 0, bortsett fra elementet i posisjon $i$, som er lik 1. En vektor i $\mathbb{R}^n$ er entydig uttrykt som en lineær kombinasjon av disse vektorene.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

La nå $T$ være en funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ som er lineær. Da har vi at

$$T(\mathbf{x}) = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n)$$

Vi lager nå en $m \times n$-matrise $\mathbf{T}$ ved å la rekke nummer $i$ være lik $T(\mathbf{e_i})$. Da har vi at

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{Tx}$$

hvor produktet av $\mathbf{T}$ med $\mathbf{x}$ fra venstre er gitt ved matrisemultiplikasjon. Matrisen $\mathbf{T}$ kalles **standardmatrisen** til transformasjonen.

Vi kan nå se på noen eksempler. Refleksjon om $x$-aksen i planet $\mathbb{R}^2$ er en lineær transformasjon. Standardmatrisen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Slik er det fordi $\mathbf{e}_1$ er uendra mens $\mathbf{e}_2$ skifter fortegn under transformasjonen.

Rotasjon med en vinkel $v$ i positiv retning i planet har standardmatrise

$$\begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix}$$

Dette er slik fordi $\mathbf{e}_1$ sendes til $\cos(v)\mathbf{e}_1 + \sin(v)\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_2$ sendes til $\cos(v)\mathbf{e}_2 - \sin(v)\mathbf{e}_1$.

**Oppgave 16** *Finn standardmatrisen til rotasjon om $y$ og $z$ aksen også (pass på at du roterer i positiv retning).*

**Oppgave 17** *Regn ut begge produktene av rotasjon 90 grader om $x$-aksen og rotasjon 90 grader om $z$-aksen. Sjekk at resultatene faktisk stemmer med det du får ved å rotere et aksesystem 90 grader først om den ene og så om den andre aksen.*

En **projeksjon** er en lineær transformasjon fra $\mathbb{R}^n$ til seg selv med egenskapen at $P^2 = P$. Et element som er lik sitt eget kvadrat kalles et **idempotent** element.

**Oppgave 18** *Vis at projeksjonen i planet ned til linjen gjennom origo med retningsvektor* $[a, b] \neq \mathbf{0}$ *er gitt ved*

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}$$

*Sjekk at kvadratet av denne matrisen faktisk er lik seg selv.*

**Oppgave 19** *Avgjør om følgende avbildninger fra planet til seg selv er lineære eller ikke. Hvis transformasjonene er lineære finn standardmatrisen for transformasjonen.*

1. *Projeksjonen til linjen som går gjennom punktet* $(1, 0)$ *og som er parallelle til vektoren* $[1, 1]$
2. *Projeksjonen til linjen som går gjennom punktet* $(4, -12)$ *og som er parallell til linjen* $[-1, 3]$.
3. *avbildningen som sender* $(x, y)$ *til* $(xy, 0)$
4. *funksjonen som sender* $(x, y)$ *til* $(\sqrt{x^2}, 0)$
5. *Avbildingen vi får ved å bytte om* $x$*- og* $y$*-koordinaten.*

Vi beskriver nå projektsjonen ned til et plan gjennom origo i rommet. Anta at planet er utspent av to vektorer $\mathbf{u_1}$ og $\mathbf{u_2}$. Alle vektorer fra origo til et vilkårlig punkt på planet er da på formen $c_1\mathbf{u_1} + c_2\mathbf{u_2}$ for skalarer $c_1$ og $c_2$. For å gjøre beskrivelsen av projeksjonen mer oversiktlig vil vi videre anta at begge vektorene har lengde 1 og at der er ortogonale (står vinkelrett på hverandre). Vi kan alltid sørge for det ved å ta komponenten $\mathbf{u_2} - \mathbf{u_2} \bullet \mathbf{u_1}/|\mathbf{u_1}|$ til $\mathbf{u_2}$ som er vinkelrett på $\mathbf{u_1}$, og til sist normalisere disse to ortogonale vektorene.

Vi lager en $3 \times 2$-matrise av disse to vektorene

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}]$$

Da har vi at

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{1_2}$$

Vi undersøker hva projeksjonen gjør med hver av basisvektorene $\mathbf{e_i}$. Projeksjonen ned i planet er

$$(\mathbf{u_1} \bullet \mathbf{e_i})\mathbf{u_1} + (\mathbf{u_2} \bullet \mathbf{e_i})\mathbf{u_2}$$

fra våre antakelser om vektorene $\mathbf{u_1}$ og $\mathbf{u_2}$. Standardmatrisen til projeksjonen er derfor

$$[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u_1}^T \\ \mathbf{u_2}^T \end{bmatrix} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T$$

Legg merke til at

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T) \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T) = \mathbf{U} \cdot (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T$$

**Oppgave 20** *Vi betrakter følgende plan gjennom origo utspent av de ortonormale vektorene*

$$\mathbf{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, -1, 0] \qquad \mathbf{u_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]$$

*Vis at standardmatrisa til projeksjonen til planet er gitt ved*

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

*(Sjekk gjerne at matrisen er idempotent og at den bevarer vektorene* $\mathbf{u_1}$ *og* $\mathbf{u_2}$ *mens en normalvektor til planet slik som* $[1, 1, -2]$ *sendes til* $\mathbf{0}$*.)*

En løsning til likninsystemnet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ kalles en **partikulær løsning**. En løsning til likninsystemnet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ kalles en **homogen løsning**.

**Oppgave 21** *Vis at samlingen av homogene løsninger til et likningssystem har egenskapen at det er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon. Vis med eksempel hvordan dette feiler for løsninger til et likninssystem* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$*, hvor* $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$*.*

**Oppgave 22** *Hvis* $\mathbf{x}$ *og* $\mathbf{y}$ *begge er løsninger til linkningsystemet da er differanse* $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ *en løsning til det homogene likningssystemet* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$*.*

*Vis at alle løsninger til likningssystemet* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *består av summen av en fast partikulær løsning pluss alle mulige homogene løsninger til likningen.*

**Oppgave 23** *La nå* $T$ *være en funksjon fra* $\mathbb{R}^n$ *til* $\mathbb{R}^m$ *som er lineær. La* $A$ *være en* $n \times k$*-matrise, og la* $\mathbf{v}$ *være en* $k$*-kolonnevektor. Vis følgende*

$$T(A\mathbf{V}) = T(A)\mathbf{v}$$

*Her betyr* $T(A)$ *at transformasjonen* $T$ *utføres på hver av kolonnevektorene.*

# 10 Rang til en matrise

**Nullrommet** til en matrise $\mathbf{M}$ er alle vektorene som avbilder til null-vektoren under den lineære transformasjonen som matrisen definerer. **Kolonnerommet** til en vektor er alle vektorer som er i bilde av transformasjonen. Det vil si at alle vektorer som er på formen $\mathbf{Mx}$ for en vektor $\mathbf{x}$. Dimensjonen til kolonnerommet kalles **rangen** til matrisen. Rangen til en matrise $\mathbf{A}$ skrives $\text{rang}(\mathbf{A})$. **Raderommet** til en matrise er alle vektorer som er en kombinasjon av radene i matrisen. Raderommet til $\mathbf{M}$ er det samme som kolonnerommet til den transponerte matrisen $\mathbf{M}^T$.

Hvis to matriser er (rad)-ekvivalente så er både nullrommet og raderommet også ekvivalente. Kolonnerommene vil ikkje være ekvivalente, men dimensjonen til kolonnerommene vil være like. Dette kan vi se som følgende: Hvis kolonnevektorene nummer $i_1, \ldots, i_k$ i matrisen $(A)$ er lineært uavhengige, da er også kolonnevektorene nummer $i_1, \ldots, i_k$ lineært uavhengige i alle ekvivalente matrise. Derfor er dimensjonen til to ekvivalente matrise størren enn eller lik hverandre, og derfor like.

Vi viser nå hvordan vi kan finne nullrommet og raderommet fra den ekvivalente matrisen på redusert trappeform. Raderommet har basis radvektorene i matrisen på redusert trappeform. For hver $i$, slik at det ikke er et ledende element i kolonne $i$, finner vi en vektor i nullrommet med elementet i posisjon $i$ lik 1 og alle elmenter i posisjon $k$, for $k > i$, lik 0. Det er mulig å finne slike vektorer fra konstruksjonen av en matrise på trappeform. Disse vektorene er alle i nullrommet og de er lineært uavhengige. Vi kan ikke ha vektorer i null-rommet som har elementet lengst til høyre ulik null i en søyle hvor det er et ledende element. Null-rommet er derfor generert av disse vektorene vi har konstruert. Dimensjonen til null-rommet er derfor lik dimensjonen til matrisen minus dimensjonen til raderommet.

Hvis vi velger kolonnevektorene til matrisen i posisjonene hvor det er et ledende element i en ekvivalent matrise på trappeform får vi lineært uavhengige vektorer. Legger vi til en annen kolonnevektore er systemet lineært avhengig (siden det er opplagt tilfelle for den trappereduserte matrisen). Derfor utgjør disse vektorene en basis for kolonnerommet.

Vi konkluderer med at rangen $\text{rang}(\mathbf{M})$ til en matrise $\mathbf{M}$ er lik antall ledende elementer til matrisen på trappeform, som er lik både dimensjonen til raderommet og til kolonnerommet. Summen av rangen og dimensjonen til nullrommet er lik antall kolonner i matrisen.

**Oppgave 24** *Vis at en $m \times n$-matrise har et null-rom som har dimensjon minst $|m-n|$. Spesielt er dimensjonen alltid positiv for ikke-kvadratiske matriser.*

Ikke omhandlet enda
Lineært uavhengige vektorer
Rekursiv beskrivelse av determinanter
Funksjonsrom av ulike slag.