Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver har lik vekt.

Oppgave 1
Vi definerer matrisene A, B, og C som

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Regn ut følgende matrisesummer og matriseprodukter, om mulig. Dersom det ikke er mulig skal du kort forklare hvorfor.

$$A + B, \quad AB, \quad CB, \quad A + C^T.$$

LF:
$A+B$: A er en 2x3-matrise, mens B er 3x3. Det gir ikke mening å legge sammen matriser med ulik dimensjon, dvs det er ikke mulig å regne ut $A+B$.
AB: Siden A er en 2x3-matrise og B er 3x3 (antall kolonner i A = antall rekker i B) kan vi regne ut AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 23 \\ 7 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

CB: C er en 3x2-matrise, mens B er 3x3, dvs det er ikke mulig å regne ut CB siden antall rader i $C \neq$ antall kolonner i B.
$A + C^T$: C er en 3x2-matrise, dvs C^T er en 2x3-matrise. Da har A og C^T samme dimensjon og

$$A + C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 13 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

er rekke-ekvivalent med matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

M er totalmatrisen (også kalt *den utvidede matrisen*, på engelsk *the augmented matrix*) til et likningssystem med ukjente x_1, x_2 og x_3.

b) Regn ut løsningen til dette likningssystemet.
LF:
Ved hjelp av den rekke-ekvivalente matrisen kan ligningssystemet skrives på formen

$$\begin{aligned} x_1 + \; 2x_2 \; +3x_3 &= -1, \\ x_2 \; -2x_3 &= 0, \\ x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Dvs løsningen er $x_3 = 4$. Settes denne inn i ligningen over får vi $x_2 = 2x_3 = 2\times4 = 8$. Til sist er $x_1 = -1-2x_2-3x_3 = -1-2\times8-3\times4 = -29$. Alternativt kunne vi ha fortsatt å redusere matrisen gitt over. Ved først å addere rad 3 mulitiplisert med 2 til rad 2 og addere rad 3 mulitiplisert med -3 til rad 1 for så å addere rad 2 mulitiplisert med -2 til rad 1 ville vi ha fått den rekkee-ekvivalente matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Herfra ser vi løsningen av ligningssystemet.

Vi ser nå på likningssystemet $M\vec{x} = \vec{0}$ med

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Én løsning er $\vec{x} = \vec{0}$, men likningssystemet har flere løsninger.

c) Beskriv *alle* løsningene til likningssystemet $M\vec{x} = \vec{0}$.
LF:
Vi kan bruke den rekke-ekvivalente matrisen bestemt over;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Herfra ser vi at x_4 må velges fritt (ingen ledende enere i den fjerde kolonnen) og $\underline{x_3 = -4x_4,\ x_2 = -8x_4 \text{ og } x_1 = 29x_4}$. Eventuelt kan løsningen skrives

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 29 \\ -8 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} x_4.$$

Oppgave 2

a) Løs den komplekse likningen

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

Oppgi svaret eksakt både på kartesisk og polar form.

LF:

Bruker ABC-formelen og får

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i.$$

Dvs to løsninger $z_1 = \underline{-1+i}$ og $z_2 = \underline{-1-i}$ (kartesisk form). Skriver på polar form $re^{i\theta}$: Lengden $r = \sqrt{(-1)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}$. Vinklene θ er gitt ved $\tan\theta = \pm 1/(-1) = \mp 1$. Dvs $\theta = \mp\pi/4$. Men de to løsningene ligger i andre og tredje kvadrant i det komplekse planet. Vi må derfor legge til en vinkel π på begge disse. Vi får derfor de to løsningene (på polar form): $z_1 = \underline{\sqrt{2}e^{i3\pi/4}}$ og $z_2 = \underline{\sqrt{2}e^{i5\pi/4}}$.

b) Bestem løsningen til initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

LF:

Generell løsning til differensialligningen er $y = y_H + y_P$, hvor y_H er generell løsning til tilhørende homogen ligning. For å bestemme y_H må vi sette opp den karakteristiske ligningen:

$$r^2 + 2r + 2 = 0.$$

Denne er løst i Oppgave 2, hvor vi fant røttene $r_1 = -1 + i$ og $r_2 = -1 - i$. Da har vi generell løsning av den homogene differensialligningen

$$y_H(x) = e^{-x}\left(A\cos x + B\sin x\right),$$

hvor A og B er vilkårlige. Skal så bestemme partikulærløsning y_P. Høyre side i differensialligningen er en konstant. Vi ser derfor etter y_P som er konstant, dvs $y_P = K$. Setter inn og får:

$$\text{Venstre side} = y_P'' + 2y_P' + 2y_P = 0 + 0 + 2K = 2K.$$

Samtidig er Høyre side $= 2$, dvs $2K = 2$ slik at $K = 1$. Dvs $y_P = K = 1$. Da er generell løsning

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = e^{-x}\left(A\cos x + B\sin x\right) + 1.$$

Denne løsningen skal tilfredsstille $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$. Ser at $y(0) = A + 1$, dvs $A = 0$. Da er

$$y(x) = Be^{-x}\sin x + 1 \Rightarrow y'(x) = B\left(e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x\right),$$

slik at $y'(0) = B$, dvs $B = 1$. Da er løsningen til initialverdiproblemet

$$y(x) = \underline{e^{-x}\sin x + 1}.$$

Oppgave 3

a) Forklar hvorfor funksjonen

$$f(x) = \ln(x^2) - 1/x$$

har akkurat ett nullpunkt på intervallet $[1, 2]$.
LF:
Funksjonen f er kontinuerlig og skifter fortegn på $[1, 2]$: $f(1) = \ln 1 - 1/1 = -1 < 0$, $f(2) = \ln 4 - 1/2 \approx 0.89 > 0$. I følge skjæringssetningen finnes da minst én verdi c i intervallet $[1, 2]$ hvor $f(c) = 0$. I tillegg er $f'(x) = 2x/x^2 + 1/x^2 = 2/x + 1/x^2$, som er positiv på $[1, 2]$. Da er f voksende og det kan være kun ett nullpunkt.

b) Benytt Newtons metode med startverdi $x_0 = 1$ og tre iterasjoner til å estimere nullpunktet.
LF:
Nullpunktet estimeres ved Newtons metode som ser slik ut i dette tilfellet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\ln(x_n^2) - 1/x_n}{2/x_n + 1/x_n^2} = x_n - \frac{x_n^2\ln(x_n^2) - x_n}{2x_n + 1} = x_n\left(1 - \frac{2x_n\ln(x_n) - 1}{2x_n + 1}\right).$$

Med $x_0 = 1$ og tre iterasjoner får vi:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0\left(1 - \frac{2x_0\ln(x_0) - 1}{2x_0 + 1}\right) = 1 - \frac{0 - 1}{2 + 1} = \frac{4}{3}. \\
x_2 &= x_1\left(1 - \frac{2x_1\ln(x_1) - 1}{2x_1 + 1}\right) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{2(4/3)\ln(4/3) - 1}{2(4/3) + 1}\right) \approx 1.4664, \\
x_3 &= x_2\left(1 - \frac{2x_2\ln(x_2) - 1}{2x_2 + 1}\right) = 1.4664\left(1 - \frac{2 \times 1.4664\ln(1.4664) - 1}{2 \times 1.4664 + 1}\right) \approx \underline{1.4206}.
\end{aligned}$$

Oppgave 4
Vis at punktet $(1,2)$ ligger på kurven definert ved

$$\sqrt{x^3} - x^2 y + (y-1)^4 = 0$$

Bestem ligningen til tangenten til kurven i $(1,2)$.
LF:
Punktet $(1,2)$ ligger på kurven: Setter $x=1$ og $y=2$ i ligningen og får

$$\sqrt{1^3} - 1^2 \times 2 + (2-1)^4 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Bestemmer stigningstallet til tangenten til kurven ved å bestemme den deriverte ved implisitt derivasjon (husker at $\sqrt{x^3} = x^{3/2}$):

$$(3/2)x^{1/2} - \left(2xy + x^2 \frac{dy}{dx}\right) + 4(y-1)^3 \frac{dy}{dx} = 0.$$

Dette gir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(3/2)x^{1/2} + 2xy}{-x^2 + 4(y-1)^3}$$

slik at dy/dx i punktet $(1,2)$ er $(-3/2+4)/(-1+4) = (5/2)/3 = 5/6$. Dvs ligningen til tangenten er $y = (5/6)x + b$. Konstanten b bestemmer vi ved å sette inn $x=1$, $y=2$ i ligningen: $b = 2 - (5/6) \times 1 = 7/6$. Dvs ligningen til tangenten til kurven i $(1,2)$ er

$$\underline{y = \frac{5}{6}x + \frac{7}{6}}.$$

Oppgave 5
Når grafen til $y = \sin(x)$ mellom $x = 0$ og $x = \pi/2$ roteres om y-aksen dannes en vaselignende beholder.

Regn ut volumet til denne beholderen.
LF:
Volumet til beholderen kan ses på som volumet som fremkommer når arealet mellom grafene til $y = 1$ og $y = \sin x$ roteres om y-aksen. Dermed er volumet gitt ved

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} x \cdot 1 \, dx - 2\pi \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin x \, dx.$$

Her må vi løse $\int x \sin x \, dx$ ved delvis integrasjon. Setter $u = x$ slik at $u' = 1$, $v' = \sin x$, $v = -\cos x$. Dvs

$$\int x \sin x \, dx = -x\cos x - \int (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Da er

$$V = 2\pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2} - 2\pi \left[-x\cos x + \sin x\right]_0^{\pi/2} = 2\pi\left(\frac{1}{2}(\pi/2)^2 - 1\right) = \underline{2\pi\left(\pi^2/8 - 1\right) \approx 1.4684}.$$

Oppgave 6

a) Bruk trapesmetoden med $n = 4$ og $n = 5$ (n = antall delintervaller) til å regne ut tilnærmede verdier for det bestemte integralet

$$\int_{-1}^{1} |1 - x|\, dx.$$

LF:
MERK: Oppgavestilleren tenkte at integralet som skulle løses i denne oppgaven var $1-|x|$, ikke $|1-x|$. Dette gjorde at de to trapes-summene i a) ble like, første deloppgave i b) ble triviell og andre deloppgave forvirrende. Dette vil selvsagt bli tatt hensyn til i sensuren.
Trapesmetoden med $n = 4$ for integralet $[-1, 1]$ for en funksjon f er generelt

$$\begin{aligned} T_n = \frac{h}{2}(f(-1) + 2f(-1+h) + 2f(-1+2h) + \\ \cdots + 2f(-1+(n-1)h) + f(-1+nh)), \end{aligned}$$

hvor $h = 2/n$. Dvs våre estimater blir

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{2/4}{2}\left(f(-1) + 2f(-1/2) + 2f(0) + 2f(1/2) + f(1)\right) \\ &= \frac{1}{4}(2 + 3 + 2 + 1 + 0) = \underline{2}. \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} T_5 &= \frac{2/5}{2}\left(f(-1) + 2f(-3/5) + 2f(-1/5) + 2f(1/5) + 2f(3/5) + f(1)\right) \\ &= \frac{1}{5}(2 + 16/5 + 12/5 + 8/5 + 4/5 + 0) = \frac{1}{5}\frac{50}{5} = \underline{2}. \end{aligned}$$

b) Regn ut den eksakte verdien til integralet.

Hvorfor er trapesmetoden med $n = 4$ mer nøyaktig enn med $n = 5$ for dette integralet?
MERK: Det andre spørsmålet utgår fra eksamen siden $T_4 = T_5$.
LF:
Eksakt verdi til integralet bestemmes lettest ved å se på grafen til

$|1-x|$. Integralet er arealet til en trekant med grunnlinje 2 og høyde 2. Enkle geometriske betraktninger gir dermed at

$$\int_{-1}^{1} |1-x|\, dx = \underline{2}.$$

Oppgave 7

En svært smittsom sykdom herjer i ei bygd med 1000 mennesker. Antall smittede innbyggere $S(t)$ ved tida t (målt i dager) kan beskrives ved differensiallikningen

$$S' = 0.0002S\,(1000 - S)\,.$$

Hvor mange blir smittet per dag når $S = 100$?

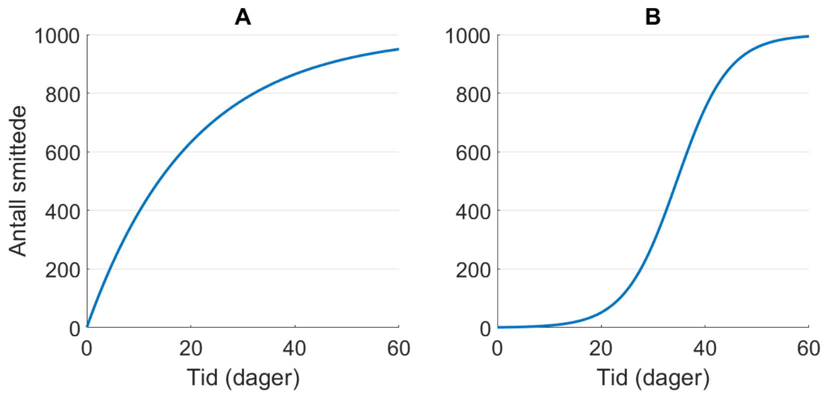
Hvor mange av bygdas innbyggere er smittet når S vokser raskest?

Hvilken av figurene under viser en løsningskurve til differensiallikningen?

(Du trenger ikke løse differensiallikningen for å kunne svare på spørsmålene i oppgaven).
LF:
Når $S = 100$ er endring per dag $= S' = 0.0002 \cdot 100 \cdot (1000 - 100) = 0.0002 \cdot 90000 = 18$, dvs $\underline{18}$ nye smittede per dag.

S vokser raskest når S' er maksimal, dvs vi må finne maksimum av funksjonen $0.0002S(1000-S)$. Vi definerer $g(S) = S(1000-S)$ på intervallet $[0, 1000]$. Funksjonen g er lik 0 i endepunktene og større enn 0 ellers. Maksimum til g bestemmes derfor ved å derivere og sette lik null: $g'(S) = 1000 - 2S$, dvs $g' = 0 \Leftrightarrow S = 500$, altså oppnår g' sitt maksimum når $S = 500$, dvs S vokser raskest når $\underline{S = 500.}$

For å bestemme hvilken av kurvene som er løsningskurve kan vi enten bruke at endringen er liten når S er liten (pga faktoren S i differensialligningen), eller at endringen i S er størst når $S = 500$. Begge deler er tilfelle i kurven i figur B, men ikke tilfelle i kurven i figur A. I figur A ser det ut til at veksten er størst når $S = 0$. Kurven i <u>figur B</u> er dermed en løsningskurve.


A
B
1000
800
600
400
200
0
0
20
40
60
Antall smittede
Tid (dager)
Tid (dager)

SLUTT