

Eksamen i matematikk 1000,
august 2016.

Oppgave 1

$$a) \quad AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ -2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & -2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) & -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 & -3 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

B har 3 søyler, C har 2 rader.

Derfor er ikke produktet BC definert.

$$CB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 - 0 + 2 & 0 - 3 - 6 & -2 - 1 - 3 \\ 6 - 0 + 6 & 0 - 3 - 18 & -3 - 1 - 9 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 & -9 & -6 \\ 12 & -21 & -13 \end{pmatrix}}}$$

$$b) \quad \det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

$\det B = 0 \Leftrightarrow$ B har inga inversmatrise

c) Dessom A er invertibel, kan vi løse likninga slik:

$$AX = C'$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}C'$$

$$IX = A^{-1}C'$$

$$X = A^{-1}C'$$

A er invertibel:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - (-2) \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}C' = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Inga løysing! Leiende tal i søyle lengst til høgre i totalmatrise redusert til trappoform.

Totalmatrise

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a-2 & 2 & -(a+2) \\ a+2 & -(a+2) & 0 & 3a+b & \left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow r \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a-2 & 2 & \\ 0 & 0 & -(a-2)(a+2) & a+2 & \end{array} \right)$$

Må ha: $-(a-2)(a+2) = 0$ og $a+2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow a = \pm 2 \quad \text{og} \quad a \neq -2$$

$$\Leftrightarrow \underline{a = 2}$$

Oppgave 2

a) Hvis folketallet F ikke endrer seg med tiden t , er $F'(t) = 0$.

Det gir:

$$0 = 0.3 - 0.06 F$$

$$F = \frac{0.3}{0.06} = 5$$

Folketallet vil stabilisere seg på 5 millioner.

b) Gitt: $F(0) = 12$

Differensialligninga er lineær med konstante koeffisientar.

$$F' + 0.06 F = 0.3$$

Homogen ligning:

$$F'_h + 0.06 F_h = 0$$

-Går ut frå at $F_h = e^{rt}$ er ei løysing for passe r :

$$F'_h = r e^{rt}$$

$$r e^{rt} + 0.06 e^{rt} = 0$$

$$r = -0.06$$

Generell løysing for homogen ligning:

$$F_h = A e^{-0.06t}$$

-Går ut frå at vi kan finne ei partikulær løysing som er ein konstant: $F_p = a$, $F'_p = 0$

Sett inn:

$$0 + 0.06 a = 0.3$$

$$a = 5, \quad F_p = 5$$

$$\text{Totalt: } F(t) = F_h + F_p = A e^{-0.06t} + 5$$

$$\text{Startbetingelse: } F(0) = 12$$

$$A e^{-0.06 \cdot 0} + 5 = 12$$

$$A = 7$$

$$\text{Løsning: } \underline{F(t) = 7 e^{-0.06t} + 5}$$

Problemet kan også løses med integrerende faktor, $e^{0.06t}$:

$$e^{0.06t} (F' + 0.06F) = e^{0.06t} 0.3$$

$$(e^{0.06t} F)' = 0.3 e^{0.06t}$$

$$e^{0.06t} F = \int 0.3 e^{0.06t} dt = \frac{0.3}{0.06} e^{0.06t} + C'$$

$$F = e^{-0.06t} (5 e^{0.06t} + C') =$$

$$C' e^{-0.06t} + 5$$

Opgave 3

$$a) f'(x) = 3 - 2x + 2 \cos(2x) \cdot (\cos(2x))' =$$

$$6x + 2 \cos(2x) \cdot (-\sin(2x)) \cdot (2x)' =$$

$$6x - 2 \cos(2x) \sin(2x) \cdot 2 =$$

$$\underline{6x - 4 \cos(2x) \sin(2x)}$$

$$(= 6x - 2 \sin(4x))$$

b) Delvis integration:

$$\int u v' dx = uv - \int u' v dx$$

Med $u = x^2$ og $v' = e^x$:

$$u' = 2x, \quad v = e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx =$$

$$x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

My delvis integration på $\int x e^x dx$:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + c'$$

Sett inn:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + c') =$$

$$x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c =$$

$$\underline{e^x (x^2 - 2x + 2) + c'}$$

Kontroll:

$$\frac{d}{dx} (e^x (x^2 - 2x + 2) + c) =$$

$$e^x (2x - 2 + 0) + e^x (x^2 - 2x + 2) + 0 =$$

$$e^x (2x - 2 + x^2 - 2x + 2) = \underline{x^2 e^x}$$

c) Sett inn $x_0=1, y_0=2$:

Venstre side:

$$2 \cdot 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 2$$

Venstreside er like høgreside;
likninga er oppfylt.

Likning for linje med stignings-
tal a gjennom punktet (x_0, y_0) :

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

For tangenten er stigningstallet
 a like den deriverte.

Implisitt derivasjon:

$$\frac{d}{dx} (2x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 2y) = \frac{d}{dx} 2$$

$$4x + 2y \frac{dy}{dx} - 2(1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx}) - 4 + 2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$4x - 2y - 4 + (2y - 2x + 2) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - y - 2 + (y - x + 1) \frac{dy}{dx} = 0$$

Sett inn x_0, y_0 :

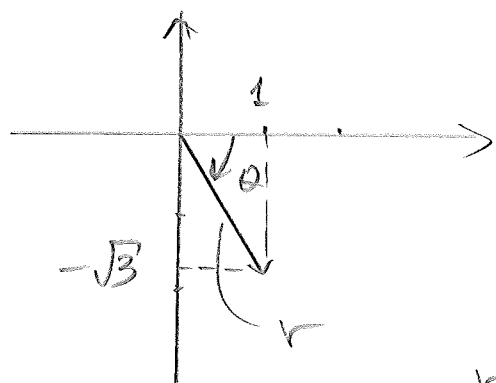
$$2 \cdot 1 - 2 - 2 + (2 - 1 + 1) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-2 + 2 \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

Likning for tangent:

$$y - 2 = 1(x - 1), \quad \underline{y = x + 1}$$

d) I det komplekse planet



$$1 - \sqrt{3}i = r e^{i\theta}$$

$$\text{der } r^2 = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4$$

$$\text{og } \tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{4} = 2$$

Siden θ ligger i 4. kvadrant, får

$$\text{vi } \theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\arctan \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$$

(Kan også velge $\theta = \frac{5\pi}{3}$)

Altså:

$$1 - \sqrt{3}i = \underline{2 e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

-Kan legge et heltal ganger 2π til θ og få tilbake det samme

$$\text{talet}; \quad 1 - \sqrt{3}i = 2 e^{i(-\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi)} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Dette bruker vi til å finne

alle de tre løsningene av likningen:

$$z^3 = 2 e^{i(-\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi)}$$

$$z = \left(2 e^{i(-\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi)} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}n\pi)}$$

$$n=0$$

$$z_0 = \underline{\underline{\sqrt[3]{2} e^{-i\frac{\pi}{9}}}}$$

$$n=1$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi)} = \underline{\underline{\sqrt[3]{2} e^{i\frac{5\pi}{9}}}}$$

$$n=2$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3} \cdot 2\pi)} = \underline{\underline{\sqrt[3]{2} e^{i\frac{11\pi}{9}}}}$$

Oppgave 4

I for-løket ser vi at R er summen $\sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x$ der

$$f(x) = x^3 - x^2, \quad \text{gitt i linje 3,}$$

$$N = 100 \quad (\text{linje 6}) \quad \text{og} \quad x = a + (i-1)\Delta x.$$

$$\text{Med } a = 1, \quad b = 3 \quad (\text{linje 1 og 2})$$

$$\text{blir } \Delta x = \frac{3-1}{100} = \frac{1}{50} \quad (\text{linje 7}).$$

Dette er en Riemann-sum for $f(x)$ med en venstre-seleksjon på en regulær partisjon av intervallet $[a, b] = [1, 3]$.

Når vi antager $N, \text{ til } R$ nærme
seg integralet

$$\int_a^b f(x) dx = \int_1^3 (x^3 - x^2) dx =$$

$$\left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 = \frac{3^4 - 1}{4} - \frac{3^3 - 1}{3} = \underline{\underline{\frac{34}{3}}}$$

Oppgave 5

a) - Løser først den homogene

ligning $y'' - 2y' + 5y = 0$ ved
å gå ut fra at $y = e^{rx}$.

$$y' = r e^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}:$$

$$r^2 e^{rx} - 2r e^{rx} + 5 e^{rx} = 0$$

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

$$r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = 1 \pm 2i$$

Generell løsning: $y = e^x (A \cos(2x) + B \sin(2x))$

- Går ut fra at vi kan finne
konstante partikulær løsning av
den inhomogene ligning: $y_p = a$

$$y_p' = y_p'' = 0$$

$$0 - 2 \cdot 0 + 5a = 10, \quad a = 2, \quad y_p = 2$$

Generell løsning:

$$y = y_h + y_p = \underline{e^x (A \cos(2x) + B \sin(2x)) + 2.}$$

b) Ligningen er både lineær og separabel. Her vil vi løse ho som er separabel ligning:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2x-1} \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = \sqrt{2x-1} \, dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \sqrt{2x-1} \, dx$$

Variabelbytte: $u = 2x - 1, \quad dx = \frac{1}{2} du$

$$\begin{aligned} \ln |y| &= \int u^{1/2} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} u^{\frac{1}{2} + 1} + C' \\ &= \frac{1}{3} u^{3/2} + C' = \frac{1}{3} (2x-1)^{3/2} + C' \end{aligned}$$

$$y = \pm e^{\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C'} = \pm e^{C'} e^{\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}}$$

$$\underline{y = C' e^{\frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}} \quad (C' = \pm e^{C'})}$$

Oppgave 6

$$p(x) = 2 + \frac{x}{1 + e^{x-b}}$$

a) $p(x)$ er kontinuerleg og deriverbar. Maksimalpunktet vil anten være et randpunkt eller et punkt der $p'(x)$ endrer forteiden.

$$p'(x) = 0 + \frac{1(1 + e^{x-b}) - x(0 + e^{x-b} \cdot 1)}{(1 + e^{x-b})^2} =$$

$$\frac{1 + e^{x-b} - x e^{x-b}}{(1 + e^{x-b})^2} = \frac{1 + (1-x)e^{x-b}}{(1 + e^{x-b})^2}$$

$p'(x)$ er kontinuerleg. Derfor må $p'(x)$ være null der han endrer forteiden.

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + (1-x)e^{x-b}}{(1 + e^{x-b})^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + (1-x)e^{x-b} = 0$$

For randpunktet har vi et

$$p'(0) = \frac{1 - e^{-b}}{(1 + e^{-b})^2} > 0 \quad \text{og}$$

-12

$$p'(10) = \frac{1 - 9e^4}{(1 + e^4)^2} < 0$$

Dibor er begge randpunktene lokale minima. Maksimalpunktet må derfor vere eit punkt som oppfyller

$$\underline{1 + (1-x)e^{x-6} = 0}$$

b) Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\text{Her: } f(x) = 1 + (1-x)e^{x-6}$$

$$f'(x) = 0 + (-1)e^{x-6} + (1-x)e^{x-6} \cdot 1 = -xe^{x-6}$$

Vi får:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1 + (1-x_n)e^{x_n-6}}{x_n e^{x_n-6}}$$

Med $x_0 = 5$ får vi

$$x_1 = 5 + \frac{1 + (1-5)e^{5-6}}{5 \cdot e^{5-6}} = 4.7437$$

$$x_2 = x_1 + \frac{1 + (1-x_1)e^{x_1-6}}{x_1 \cdot e^{x_1-6}} = 4.6949$$

Altså: $x \approx 4.69$

c) Formel for volum ved å dreie om x-aksen gir

$$V = \pi \int_0^h (p(x))^2 dx$$

Både V og h er funksjoner av tide, $V(t)$, $h(t)$.

Kjernerregelen:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

Fundamentaltteoremet:

$$\frac{d}{dh} \int_0^h (p(x))^2 dx = (p(h))^2$$

Altså:

$$\frac{dV}{dt} = \pi (p(h))^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\underline{V'(t) = \pi (p(h))^2 \cdot h'(t)}$$

Gitt: $V'(t) = 0.1 \frac{\text{dm}^3}{\text{s}}$ (hele tide)

Med $h=0$:

$$V'(t) = \pi (p(0))^2 h'(t)$$

$$0.1 = \pi \cdot 2^2 h'(t)$$

$$h'(t) = \frac{0.1}{4\pi} \approx 0.007958 \dots$$

Vatnet stiger med farten $0.02958 \text{ dm/s} \approx$
 0.796 cm/s når $h=0$

Med $h=6$: $p(h) = 2 + \frac{6}{1 + e^{6-6}} = 5$

$$V' = \pi (p(6))^2 h'(t)$$

$$0.1 = \pi \cdot 5^2 h'(t)$$

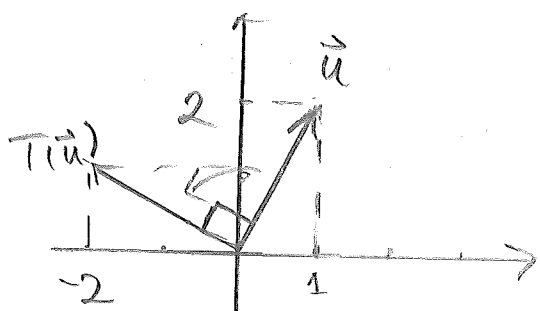
$$h'(t) = \frac{0.1}{25\pi} = 0.001273$$

Vatnet stiger med farten $0.001273 \text{ dm/s} \approx$
 0.0127 cm/s når høyden er 6 dm .

Vi ser at vatnet stiger mye raskere
sakte når vassen er bred.

Oppgave 7

a) T : Rotasjon $\frac{\pi}{2}$ mot klokke i \mathbb{R}^2

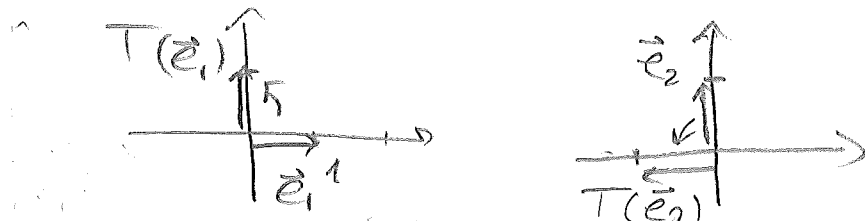


Ser:

$$\underline{T(\vec{u}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$u(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

$T(\vec{x}) = A\vec{x}$ der $A = (T(\vec{e}_1) | T(\vec{e}_2))$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Ser: $T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

således $A = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}$.

For U :

$$U(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Standardmatrisen er $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

b) Med $V(\vec{x}) = B\vec{x}$ skal vi ha et

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dette kan skrives som en
matriseligning:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_D = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_M$$

Dersom D er invertibel, er

$B = M D^{-1}$ (jmf. oppg. 1 c). Hvis ikke kan ikke B bestemmes entydig.

Vi undersøker:

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -2 \quad -3 \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ 2 \end{array} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

D er ikke invertibel; standardmatrisa til transformasjonen V kan ikke bestemmes ut fra de gitte opplysningane.

Oppgave 8

a) Eulers metode:

$$y(x_n) \approx y_n \text{ der}$$

$$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)h, \quad x_n = x_0 + nh$$

for startverdi problemet $y' = F(x, y)$

med $y(x_0) = y_0$.

Her: $h = 0.5$, $x_0 = 0$, $y_0 = -3$ og $F(x, y) = x + \frac{y}{2}$

$$y_1 = y_0 + (x_0 + \frac{y_0}{2})h = -3 + (0 + \frac{-3}{2}) \cdot 0.5 = -3.75$$

$$y_2 = y_1 + (x_1 + \frac{y_1}{2})h = -3.75 + (0.5 + \frac{-3.75}{2}) \cdot 0.5 = -4.438$$

$$y_3 = y_2 + (x_2 + \frac{y_2}{2})h = \dots = -5.047$$

$$y_4 = y_3 + (x_3 + \frac{y_3}{2})h = \dots = -5.559$$

I tabellform:

n	x_n	y_n
0	0	-3
1	0.5	-3.75
2	1	-4.44
3	1.5	-5.05
4	2	-5.56

b) Differensiallikninga er lineær og kan løysast eksakt - på same måte som i oppg. 5 b).

Med integrerende faktor får vi

$$e^{-x/2} (y' - \frac{1}{2}y) = e^{-x/2} x$$

$$(e^{-x/2} y)' = e^{-x/2} x$$

$$e^{-x/2} y = \int e^{-x/2} x dx$$

Delvis integrasjon med $u=x$ og $v' = e^{-x/2}$:

$$e^{-x/2} y = x \cdot (-2) e^{-x/2} - \int 1 \cdot (-2) e^{-x/2} dx =$$

$$-2x e^{-x/2} + 2 \int e^{-x/2} dx =$$

$$-2x e^{-x/2} - 4 e^{-x/2} + C$$

$$y = e^{x/2} (-2x e^{-x/2} - 4 e^{-x/2} + C) =$$

$$= -2x - 4 + C e^{x/2}$$

Startbetingelse: $y(0) = 4$

$$0 - 4 + C e^0 = -4, C = 0$$

$$y = -2x - 4$$

- Løsninga er ein lineær funksjon;

$y' = -2$ for alle x .

Sidan Eulers metode estimerer

y_{n+1} ved \bar{x} gå ut fra at y er lineær på intervallet $[x_n, x_{n+1}]$, vil metoden gi eksakt rett svar i dette tilfellet.

Vi illustrerer ved \bar{x} gjenta deloppgåve a) med $y(0) = -4$

$$y_1 = y_0 + (x_0 + \frac{y_0}{2})h = -4 + (0 - \frac{4}{2}) \cdot 0.5 = -5$$

$$y(x_1) = -2x_1 - 4 = -2 \cdot 0.5 - 4 = -5$$

$$y_2 = y_1 + (x_1 + \frac{y_1}{2})h = -5 + (0.5 + \frac{-5}{2}) \cdot 0.5 = -6$$

$$y(x_2) = -2 \cdot 1 - 4 = -6$$

etc.