Prøve i	Matematikk 1000 BYFE DAFE 1000
Dato:	27. mai 2016
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelark

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver har lik vekt.

Løsningsforslag

Oppgave 1
Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Regn ut, om mulig, summene $A + B + C$, $A + C$, produktene AB og BA samt $\det(A^{-1})$ (determinanten til inversmatrisen til A).

LF: Summen $A + B + C$ eksisterer ikke fordi matrisene ikke har samme dimensjon. Produktet av en 2×3-matrise med en 2×2-matrise (fra høyre) er ikke definert. Så BA eksisterer ikke.

$$A + C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -4 & 5 & 11 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}}$$

Determinanten til A er lik $\det(A) = 2 \cdot 1 - (-3 \cdot 4) = 14$ Derfor er

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \underline{\frac{1}{14}}$$

[Dette krever litt mindre arbeid enn å først finne inversmatrisen til A og deretter regne ut determinanten til matrisen.]

Oppgave 2
En lineær transformasjon T fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ har følgende egenskap

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Bestem transformasjonen $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ til vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

LF: Vi observerer at

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siden transformasjonen er lineær så er transformasjonen av vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ lik

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\left(T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \underline{\begin{bmatrix} 5/3 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

[Dere kan selvsagt først finne standardmatrisen til transformasjonen T og deretter benytte denne til å finne transformasjonen av vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dette krever litt mer arbeid.]

Oppgave 3

Regn ut determinanten til følgende 2×2 matrise med komplekse elementer

$$M = \begin{bmatrix} 2i & 1-2i \\ 1-3i & 5i \end{bmatrix}$$

Oppgi svaret eksakt både på kartesisk og på polar form.

LF: Determinanten er lik

$$\det(M) = 2i \cdot 5i - (1-2i)(1-3i) = -10 - (1-6-5i) = -5+5i$$

Determinanten på kartesisk form er $\underline{-5+5i}$. Determinanten på polar form er lik $\underline{5\sqrt{2}e^{3\pi i/4}}$.

Oppgave 4

Bestem for hvilke verdier av a følgende likningssystem har ingen, én, eller uendelig mange løsninger.

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & az & = & 3 \\ -ay & + & z & = & 2 \\ ax & + & ay & = & 1 \end{array}$$

Dere trenger ikke finne løsningene.

LF: Koeffisientmatrisen er lik

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -a & 1 \\ a & a & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanten til matrisen er lik $a(a^2-1)$. Denne er lik 0 når $a = 0$ eller når $a = \pm 1$. Hvis determinanten er ulik 0 er det akkurat én løsning.

Vi undersøker de tre tilfellene.

Tilfellet $a = 0$: Totalmatrisen er da lik

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Det er ingen løsing.

Tilfellet $a = -1$: Totalmatrisen er da lik

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Legger vi rad tre til rad én og deretter legger den nye rad én til rad to får vi

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Det er derfor ingen løsning.

Tilfellet $a = 1$: Totalmatrisen er da lik

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Trekker vi rad én fra rad tre og deretter legger til rad to til den nye rad tre får vi

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Det er derfor uendelig mange løsninger. (Løsningene er parametrisert ved for eksempel z. Da er $y = -2 + z$ og $x = 3 - z$.)

Vi oppsummerer. *Det er ingen løsning når* $a = 0$ *og* $a = -1$*. Det er uendelig mange løsninger når* $a = 1$*. Det er akkurat én løsning når* a *er forskjellig fra* $-1, 0$ *og* 1*.*

Oppgave 5

Regn ut den eksakte verdien til følgende bestemte integraler

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{3}{2x-1}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$

LF: a) Vi forsøker med lineær substitusjon og lar $u = 2x-1$. Da er $u' = 2$.

$$\int_1^3 \frac{3}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{3}{u}\frac{u'}{2}\,\mathrm{d}x = \int_{u(1)}^{u(3)} \frac{3/2}{u}\,\mathrm{d}u =$$

$$3/2\ln(u)|_1^5 = 3/2(\ln(5) - \ln(1)) = \underline{3\ln(5)/2}$$

b)

$$\int_0^\infty \frac{3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$$

er et uegentlig integral. Det er grensen av det bestemte integralet

$$\int_0^N \frac{3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$$

når N går mot uendelig.

Integralet ligner litt på $\displaystyle\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ som er lik $\arctan(u) + C$. Vi forsøker å redusere vårt integral til dette ved å anvende litt algebra samt substitusjon. Vi har at

$$\frac{3}{x^2+9} = \frac{1/3}{x^2/9+1} = \frac{1/3}{(x/3)^2+1}$$

La nå $u = x/3$. Da er $u' = 1/3$. Substitusjon gir

$$\int_0^N \frac{3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int_0^N \frac{1}{u^2+1}u'\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_{u(0)}^{u(N)} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \arctan(N/3) - \arctan(0) = \arctan(N/3)$$

Derfor er

$$\int_0^\infty \frac{3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \arctan(N/3) = \underline{\pi/2}$$

c) Vi ser at det bestemte integralet er summen av arealet til to rettvinkla likebeina trekanter med kateter av lengde 1. Derfor er integralet lik $\underline{1}$.

Vi kan også regne det ut ved å finne antideriverte. Integranden (funksjonen som integreres) er gitt ved delt forskrift som

$$|x-1| = \begin{cases} 1-x & x \le 1 \\ x-1 & x \ge 1 \end{cases}$$

Vi kan integrere intervallene $[0,1]$ og $[1,2]$ hver for seg. Alternativt får vi da

$$\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1-x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x-1\,\mathrm{d}x =$$

$$(x - x^2/2)|_0^1 + (x^2/2 - x)|_1^2 = (1-1/2) + (2-1-(1-1/2)) = 1$$

Oppgave 6

a) Vis at maksimumsverdien til

$$f(x) = -x^2 + 3ax + 4a$$

er lik $4a + 9a^2/4$ for alle verdier av parameteren a.

b) Bestem parameteren a slik at *maksimumsverdien* til funksjonen $f(x)$ er *minst* mulig. Hva er denne maksimumsverdien?

LF:

a) Vi kan fullføre kvadratet og får da

$$f(x) = -x^2 + 3ax + 4a = -(x-3a/2)^2 + (3a/2)^2 + 4a$$

Dette er størst når $x - 3a/2 = 0$. Verdien er da lik $4a + 9a^2/4$.

Alternativt kan vi lete etter kritiske punkt. Funksjonen f er deriverbar for alle x. Den deriverte er lik $f'(x) = -2x + 3a$. Den deriverte er null når $x = 3a/2$. Setter vi inn denne x verdien i funksjonen får vi $4a + 9a^2/4$. Dette er en global maksimumsverdi fordi den deriverte er positiv til venstre og negativ til høyre for dette punktet.

b) Her skal vi la parameteren a variere og finne ut når maksimumsverdien $4a + 9a^2/4$ fra del a) faktisk er minst mulig.

La oss benytte fullføring av kvadrater her også. Vi har

$$4a + 9a^2/4 = 9/4(a^2 + 16a/9) = 9/4((a + 8/9)^2 - (8/9)^2)$$

Dette er minst mulig når $a + 8/9 = 0$. Den minste verdien funksjonen f har som maksimumsverdi (for alle a) er derfor

$$-9/4 \cdot (8/9)^2 = \underline{-16/9}$$

Oppgave 7

Vi skal undersøke nullpunkt til funksjonen

$$g(x) = x^3 - x - 10$$

a) Forklar hvorfor $g(x)$ har akkurat ett nullpunkt i intervallet $[2, 3]$.

b) Benytt Newtons metode til å finne en tilnærmet verdi for dette nullpunktet i $[2, 3]$. La startverdien være 2 og utfør to iterasjoner.

LF: a) Den deriverte til funksjonen er $3x^2 - 1$. Deriverbar impliserer kontinuerlig, så funksjonen er kontinuerlig. Vi ser også at den deriverte er positiv i hele intervallet $[2, 3]$. Funksjonen kan derfor ha maksimalt ett nullpunkt. Siden $f(2) = 8 - 2 - 10 = -4$ og $f(3) = 27 - 3 - 10 = 14$ og funksjonen er koninuerlig på intervallet $[2, 3]$, så gir skjæringssetningen at funksjonen har minst ett nullpunkt. Vi konkluderer med at funksjonen har akkurat ett nullpunkt.

b) Vi benytter Newtons metode og får med startverdien $x_0 = 2$

$$x_1 = 2.3636 \qquad x_2 = 2.3102$$

(Gjentar vi prosedyren noen ganger finner vi at svaret er tilnærmet lik 2.3089073197650)

Oppgave 8

a) Bestem grensen

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin^2(x - 1)}{1 + \cos(\pi x)}$$

b) Deriver funksjonen

$$\int_0^{\cos(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

LF: a) Grensen er av type 0/0. Vi benytter L'Hopitals regel

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(x-1)}{1+\cos(\pi x)} = \lim_{x\to 1} \frac{2\sin(x-1)\cos(x-1)}{-\pi\sin(\pi x)}$$

Dette er fremdeles en grense av type 0/0. Vi benytter L'Hopitals regel en gang til og får

$$\lim_{x\to 1} \frac{2\cos^2(x-1) - 2\sin^2(x-1)}{-\pi^2\cos(\pi x)} = \frac{2}{-\pi^2(-1)} = \underline{\frac{2}{\pi^2}}$$

b) Vi benytter fundamentalteoremet i kalkulus. Funksjonen

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

er en antiderivert til e^{-x^2}. Vår funksjonen er den sammensatte funksjonen $F(\cos(x))$. Kjerneregelen gir at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\cos(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(\cos(x)) = F'(\cos(x))\cdot(\cos(x))' = \underline{-\sin(x)e^{-\cos^2(x)}}$$

Oppgave 9
La D være området avgrenset av grafen til $y = \sqrt{x} - x/2$ og x-aksen. Beregn volumet til legemet som fremkommer ved å rotere området D om y-aksen.

LF: [Multiplikasjon (divisjon) urføres før addisjon, så $\sqrt{x} - x/2$ tolkes som $\sqrt{x} - (x/2)$ og ikke som $(\sqrt{x} - x)/2$.] Grafen har nullpunkt når $\sqrt{x} = x/2$. Dette gir $x = 0$ og $x = 4$ (Kvadrer begge sider og få $x = x^2/4$. Dette sammen med kravet at $x \geq 0$ er ekvivalent til den opprinnelige likningen.)

Volumet er

$$V = \int_0^4 2\pi x\cdot(\sqrt{x} - x/2)\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^4 x^{3/2} - x^2/2\,\mathrm{d}x =$$

$$2\pi(2x^{5/2}/5 - x^3/6)|_0^4 = 2\pi(2\cdot 2^5/5 - 4^3/6 = 2^7\pi(1/5 - 1/6) = \underline{2^6\pi/15}$$

Oppgave 10
Hva gjør følgende ukommenterte skript hvis det kjøres i matlab?
Hva estimeres?

```
a=-1;
b=3;
N=20;
d=(b-a)/N;
f=@(x)  sin(x^2);
T=0;
for i=1:N
    T= T + f(a);
    a = a + d;
    T= T + f(a);
end
T*d/2
```

LF: Dette regner ut et nummerisk estimat for det bestemte integralet av funksjonen $\sin(x^2)$ fra $x = -1$ til $x = 3$. Metoden som benyttes er trapesmetoden og det anvendes $N = 20$ delintervaller. Skriptet regner ut summen av venstre og høyre funksjonsverdi i hver av de N delintervallene. Deretter ganges summen av alle dem med bredden d til intervallene og med faktorene en halv.

Oppgave 11
Finn alle løsningene til differensiallikningene

a) $2xy' - 3y - 2 = 0$

b) $y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = 0$

c) $y''(x) + y(x) = e^{-2x}$

LF: a) Dette er en første ordens lineær differensiallikning. Den er også separabel. Den er ekvivalent til

$$\frac{y'}{3y+2} = \frac{1}{2x}$$

når $x \neq 0$ og $y \neq -2/3$. Vi integrerer begge sider med hensyn til x og benytter variabelskifte (substitusjon) på venstre side

$$(1/3)\ln|3y+2| = (1/2)\ln|x| + c$$

Dette gir $3y + 2 = k|x|^{3/2}$ for $k \neq 0$. Vi sjekker tilfellet $k = 0$ separat og ser at det gir også en løsning til den opprinnelige differensiallikningen.

Løsningene er

$$\underline{y = -2/3 + K|x|^{3/2}}$$

for reelle tall K. Denne funksjonen er ikke deriverbar i $x = 0$. (Konstanten K kan ha forskjellig verdi for positive og for negative verdier av x.)

b) Denne differensiallikningen er en homogen andre ordens lineær differensiallikning med konstante koeffisienter. Vi antar at løsningene er på formen e^{rx}, og får følgende karakteristiske likningen som r da må tilfredstille

$$r^2 + 4r + 13 = (r + 2)^2 + 9 = 0$$

Løsningene er $r = -2 + 3i$ og den kompleks konjugerte $r = -2 - 3i$. Vi benytter Eulers formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ og velger å uttrykke løsningene ved kombinasjonene

$$(e^{-2+3i} + e^{-2-3i})/2 = e^{-2x}\cos(3x)$$

og

$$(e^{-2+3i} - e^{-2-3i})/2i = e^{-2x}\sin(3x)$$

fremfor

$$e^{-2+3i} \qquad \text{og} \qquad e^{-2-3i}$$

Løsningene er

$$\underline{y(x) = Ae^{-2x}\sin(3x) + Be^{-2x}\cos(3x)}$$

c) Differensiallikningen $y''(x) + y(x) = e^{-2x}$ er en inhomogen andreordens lineær differensiallikningen med konstante koeffisienter.

Den karakteristiske likningen er $r^2 + 1$. Tilsvarende som for b) får vi at de homegene løsningene er

$$y_h = A\cos(x) + B\sin(x)$$

Vi finner nå en partikulær løsning. Vi forsøker med en funksjon på formen en konstant ganget med e^{-2x}. Lar vi $y = Ke^{-2x}$, da er

$$y''(x) + y(x) = ((-2)^2 + 1)Ke^{-2x}$$

Dette er nettopp lik e^{-2x} når $K = 1/5$. Derfor er en partikulær løsning gitt ved $y_p = e^{-2x}/5$.

Løsningene til differensiallikningen er gitt ved å kombinere en partikulær løsning med alle de homogene løsningene

$$\underline{y = e^{-2x}/5 + A\cos(x) + B\sin(x)}$$

Oppgave 12

a) Anta bestanden av bakterier $y(t)$ i en bakteriekultur er styrt av følgende differensiallikning

$$y' = y \cdot (1 - 0.004y) \qquad y(0) = 1$$

Her er $y(t)$ oppgitt i antall tusen og tiden t i timer. Vokser bakteriekulturen uten avgrensing, eller nærmer den seg en verdi når t øker? I så fall hva er denne verdien?

b) Løs initialverdiproblemet i del a).

LF: Differensiallikningen vi studerer her kalles gjerne den logistiske differensiallikningen. a) Bestanden starter ut med verdien $y(0) = 1$. Da vokser bestanden tilnærmet eksponentielt. Etter hvert som bestanden øker vil faktoren $(1 - 0.004y)$ nærme seg null og bestanden stagnere. Faktoren er lik 0 når $1 - 0.004y = 0$, altså når $y = 1/0.004 = 250$. (Om bestanden skulle bli over 250 vil den avta mot 250 igjen siden y' da blir negativ.)

Bestanden y vil altså stagnere etter hvert og nærme seg verdien 250 (tusen).

b) Differensiallikningen er separabel. Vi benytter delbrøksoppspalting (og en linær substitusjon):

$$\frac{y'}{y \cdot (1 - 0.004y)} = 1$$

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{0.004}{1 - 0.004y} \right) y' \, \mathrm{d}t = \int 1 \, \mathrm{d}t$$

$$\ln|y| - \ln|1 - 0.004y| = t + c$$

$$\ln \left| \frac{y}{1 - 0.004y} \right| = t + c$$

Dette gir at

$$\left| \frac{y}{1 - 0.004y} \right| = e^c e^t$$

Siden e^c tar alle positive verdier, for ulike verider for c får vi at

$$\frac{y}{1 - 0.004y} = ke^t$$

for en konstant $k \neq 0$. Hvis $k = 0$ så må y være identisk lik 0. Vi sjekker at dette også er en løsning til differensiallikningen. Derfor kan k være vilkårlig. Vi løser nå for y og beskriver funksjonen eksplisitt.

$$y = ke^t(1 - 0.004y)$$
$$y(1 + 0.004ke^t) = ke^t$$
$$y = \frac{ke^t}{1 + 0.004 \cdot ke^t} = \frac{k}{e^{-t} + 0.004 \cdot k}$$

Initialverdien $y(0) = 1$ bestemmer k. Vi har

$$k = ke^0 = \frac{y(0)}{1 - 0.004y(0)} = \frac{1}{1 - 1/250} = \frac{250}{249}$$

Løsningen er derfor

$$\underline{y(x) = \frac{250}{1 + 249e^{-t}}}$$