Prøve i	Matematikk 1000 BYFE DAFE 1000
Dato:	27. mai 2016
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelark

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver har lik vekt.

Oppgave 1
Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Regn ut, om mulig, summene $A+B+C$, $A+C$, produktene AB og BA samt $\det(A^{-1})$ (determinanten til inversmatrisen til A).

Oppgave 2
En lineær transformasjon T fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ har følgende egenskap

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Bestem transformasjonen $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ til vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 3
Regn ut determinanten til følgende 2×2 matrise med komplekse elementer

$$M = \begin{bmatrix} 2i & 1-2i \\ 1-3i & 5i \end{bmatrix}$$

Oppgi svaret eksakt både på kartesisk og på polar form.

Oppgave 4
Bestem for hvilke verdier av a følgende likningssystem har ingen, én, eller uendelig mange løsninger.

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & az & = & 3 \\ -ay & + & z & = & 2 \\ ax & + & ay & = & 1 \end{array}$$

Dere trenger ikke finne løsningene.

Oppgave 5
Regn ut den eksakte verdien til følgende bestemte integraler

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{3}{2x-1}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$

Oppgave 6

a) Vis at maksimumsverdien til

$$f(x) = -x^2 + 3ax + 4a$$

er lik $4a + 9a^2/4$ for alle verdier av parameteren a.

b) Bestem parameteren a slik at *maksimumsverdien* til funksjonen $f(x)$ er *minst* mulig. Hva er denne maksimumsverdien?

Oppgave 7
Vi skal undersøke nullpunkt til funksjonen

$$g(x) = x^3 - x - 10$$

a) Forklar hvorfor $g(x)$ har akkurat ett nullpunkt i intervallet $[2, 3]$.

b) Benytt Newtons metode til å finne en tilnærmet verdi for dette nullpunktet i $[2, 3]$. La startverdien være 2 og utfør to iterasjoner.

Oppgave 8

a) Bestem grensen

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(x-1)}{1+\cos(\pi x)}$$

b) Deriver funksjonen

$$\int_0^{\cos(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Oppgave 9
La D være området avgrenset av grafen til $y = \sqrt{x} - x/2$ og x-aksen. Beregn volumet til legemet som fremkommer ved å rotere området D om y-aksen.

Oppgave 10
Hva gjør følgende ukommenterte skript hvis det kjøres i matlab?
Hva estimeres?

```
a=-1;
b=3;
N=20;
d=(b-a)/N;
f=@(x)  sin(x^2);
T=0;
for i=1:N
    T= T + f(a);
    a = a + d;
    T= T + f(a);
end
T*d/2
```

Oppgave 11
Finn alle løsningene til differensiallikningene

a) $2xy' - 3y - 2 = 0$

b) $y''(x) + 4y'(x) + 13y(x) = 0$

c) $y''(x) + y(x) = e^{-2x}$

Oppgave 12

a) Anta bestanden av bakterier $y(t)$ i en bakteriekultur er styrt av følgende differensiallikning

$$y' = y \cdot (1 - 0.004y) \qquad y(0) = 1$$

Her er $y(t)$ oppgitt i antall tusen og tiden t i timer. Vokser bakteriekulturen uten avgrensing, eller nærmer den seg en verdi når t øker? I så fall hva er denne verdien?

b) Løs initialverdiproblemet i del a).