Prøve i	Matte 1000 BYFE DAFE 1000
Dato:	03. mars 2016
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelark

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver har lik vekt.

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1
Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Regn ut, om mulig, den transponerte B^T til B, produktene AB og BA samt determinanten $\det(A^7)$ til A^7.

LF: Den transponerte til B er lik

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Produktet BA finnes ikkje. Produktet AB er lik

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 36 \\ -2 & 6 & 26 \end{bmatrix}$$

Determinanter respekterer produkt av matriser. Derfor er determinanten til A^7 lik

$$\det(A^7) = (\det(A))^7 = (8 \cdot 2 - 3 \cdot 6)^7 = (-2)^7 = -128$$

Oppgave 2
Bestem inversmatrisen til matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

LF: Vi regner ut determinanten til matrisen (for eksempel ved å ta utgangspunkt i siste kolonne) og finner verdien -7.

Vi kan finne inversmatrisen til M ved å benytte radoperasjone, men vi velger her i stede å finne inversmatrisen ved å regne ut cofaktor matrisen til M. Inversmatrisen er lik den transponerte av cofaktormatrisen til M delt på determinanten til M.

Cofaktormatrisen er

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & (-1)\cdot 7 \\ 1 & (-1)\cdot 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi transponerer denne og deler med $\det(M) = -7$ og får

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2/7 & 1 & -2/7 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3

Bestem alle løsningene til likningssystemet som har total matrise (utvida koeffisientmatrise) ekvivalent til

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La de fire variablene være henholdsvis x_1, x_2, x_3 og x_4.

LF: Vi utfører radoperasjoner til vi får matrisen over på redusert trappeform. (Det er det vi kaller Gauss-Jordan eleminasjon). Vi trekker fra to kopier av rad tre fra rad 1.

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi legger til en kopi av rad 2 til rad 3 og trekker fra 6 kopier av rad 2 fra rad 1.

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -3 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Vi ganger rad 1 med $-1/2$ og bytter om på radene til vi får systemet på trappeform (bytter rad 1 og rad 3 og deretter rad 2 og rad 3).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

For å få matrisen på redusert trappeform gjennstår bare å trekke rad 2 fra rad 1. Resultater er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Vi kan nå lese av løsningene. Vi lar x_4 være en fri variabel.
Da er

$$x_1 = 11 - x_4/2$$
$$x_2 = -15 - 3x_4/2$$
$$x_3 = -4$$

Oppgave 4
En lineær transformasjon T fra $\mathbb{R}^2$ til seg selv har egenskapen at

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Bestem standardmatrisen til denne lineære transformasjonen.

LF: Vi har at standardmatrisern M til transformasjonen T har egenskapen at

$$M \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Vi får da at

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.7 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Oppgave 5

a) Løs den lineære likningen

$$2z + \sqrt{3} = 2iz + i$$

med hensyn på z. Skriv løsningen på polarform, $re^{i\theta}$.

b) Finn alle løsningene til likningen

$$z\overline{z} - 2iz - 3 = 0$$

LF:

a) Vi tar ledd som har z som faktor over på venstre side

$$2z(1-i) = -\sqrt{3} + i$$

$$z = \frac{-\sqrt{3}+i}{2(1-i)}$$

Vi utvider brøken med den komplekskonjugerte $\overline{1-i} = 1+i$ og får

$$z = \frac{(-\sqrt{3}+i)(1+i)}{2\cdot 2} = (-(\sqrt{3}+1)/4 + (1-\sqrt{3})i/4$$

Dette er den kartesiske formen.

Vi beskriver nå z med polare koordinater. Vi ser at

$$2(1-i) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

$$-\sqrt{3} + i = 2e^{i5\pi/6}$$

Derfor er

$$z = \frac{2e^{i5\pi/6}}{2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}$$

$$z = (1/\sqrt{2})e^{i13\pi/12}$$

b) Siden

$$2iz = z\overline{z} - 3$$

og $z\overline{z}$ er reell for alle z så må z være rent imaginær. Vi har derfor at z er på formen $z = ib$. Setter vi dette inn i likningen får vi

$$b^2 + 2b - 3 = 0$$

Polynomet til venstre i likningen faktoriseres som

$$(b-1)(b+3)$$

Derfor er løsningene $b = 1$ og $b = -3$.

Løsningene til den opprinnelige likningen er

$$z = i \text{ og } z = -3i$$

Oppgave 6
Regn ut den eksakte verdien til de bestemte integralene.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{(2x+1)^3}}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{4x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{4}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$

LF: a) Vi benytter substitusjonen $u = 2x+1$. Da er $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$ og vi får

$$\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{3}{\sqrt{u^3}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_1^3 3u^{-3/2}\,\mathrm{d}u =$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{u^{-1/2}}{-1/2}|_1^3 = -3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right) = 3-\sqrt{3}$$

b) Vi benytter substitusjonen $u = 4+x^2$. Da er

$$\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$$

Dette gir at integralet er lik

$$\int_4^8 \frac{2}{u}\,\mathrm{d}u = 2\ln(u)\,|_4^8 = 2(\ln(8)-\ln(4)) = 2\ln(2)$$

c) Vi benytter substitusjonen $u = x/2$ som gir at integralet er lik

$$\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\cdot 2\,\mathrm{d}u = 2\arctan(u)|_0^1 = \pi/2$$

Oppgave 7
Bestem koordinatene til punktene på grafen til $y = x^2$ som er nærmest punktet $(0,3)$ på y-aksen.

LF:
Kvadratet av avstandsfunksjonen mellom punktet $(0,3)$ og punktet (x,x^2) på grafen er

$$x^2+(x^2-3)^2 = x^4-5x^2+9$$

Avstanden er minst når kvadratet av avstanden er minst. Vi kan derfor like gjerne studere kvadratet av avstanden (som er en enklere funksjon enn avstandsfunksjonen).

Dette er en glatt funksjon. Den deriverte er lik

$$4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$$

Vi har derfor mulige ekstremalverdier for avstandsfunksjonen når $x = 0$ eller når $x^2 = 5/2$. Avstanden når $x = 0$ er lik 3. Avstanden når $x^2 = 5/2$ er lik

$$\sqrt{(5/2)^2 - 5 \cdot 5/2 + 9} \simeq 2.12 < 3$$

Punktene på grafen til $y = x^2$ hvor avstanden til $(0, 3)$ er kortest er derfor $(\sqrt{5/2}, 5/2)$ og $(-\sqrt{5/2}, 5/2)$.

Oppgave 8

Vi skal undersøke nullpunkt til funksjonen

$$g(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$$

a) Forklar hvorfor $g(x)$ har akkurat ett nullpunkt i intervallet $[1, 2]$.

b) Benytt Newtons metode til å finne en tilnærmet verdi for dette nullpunktet i $[1, 2]$. La startverdien være 1 og utfør to iterasjoner.

LF:

a) Den deriverte til funksjonen g er

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Denne funksjonen er positiv for alle positive x. Så funksjonen g er voksende i intervallet $[1, 2]$. Verdien til funksjonen i endepunktene til intervallet $[1, 2]$ er

$$g(1) = -1 \text{ og } g(2) = \ln(2) - 1/2 \simeq 0.19$$

Funksjonen g er kontinuerlig for positive x siden den er deriverbar. Fra skjæringssetningen så har g minst et nullpunkt i intervallet $[1, 2]$ og siden funksjonen er økende på hele intervallet kan det ikke ha mer enn ett nullpunkt. Derfor har g akkurat ett nullpunkt i intervallet $[1, 2]$.

b) Vi benytter Newtons metode. Den rekursive formelen er

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\ln(x_n) - 1/x_n}{1/x_n + 1/x_n^2}$$

Vi starter med $x_0 = 1$ og ufører itterasjonen to ganger

$$x_1 = 1 - \frac{-1}{1+1} = 3/2$$

$$x_2 = 3/2 - \frac{\ln(3/2) - 1/(3/2)}{1/(3/2) + 1/(3/2)^2} = 3/2 - \frac{9\ln(3/2) - 6}{10} = \frac{21 - 9\ln(3/2)}{10} \simeq 1.735$$

Oppgave 9
La D være regionen i xy-planet avgrenset av x-aksen, grafen til $y(x) = 2e^x$, for x mellom 0 og 3, og linjene $x = 0$ og $x = 3$. Bestem volumet til rotasjonslegemet som fremkommer ved å rotere regionen D om y-aksen.

LF: Vi benytter sylinderskallmetoden og finner at volumet er lik

$$2\pi \int_0^3 x \cdot 2e^x \, \mathrm{d}x = 4\pi(xe^x - e^x)|_0^3$$

$$4\pi(3e^3 - e^3 - (0 - e^0)) = 4\pi(2e^3 + 1) \simeq 517.4$$

Her har vi benyttet delvis integrasjon.

Oppgave 10
Hva gjør følgende ukommenterte skript hvis det kjøres i matlab?

```
a=1;
b=3;
N=20;
d=(b-a)/N;
f=@(x) sin(x)/x;

X=a:d:b;
Y=zeros(1,N+1);
T=0;
Y(1) = f(a);
for i=1:N
    a = a + d;
    Y(i+1) = f(a);
    T = T + Y(i) + Y(i+1);
end

T*d/2

plot(X,Y)
```

LF: Skriptet plotter grafen til $\sin(x)/x$ fra $x = 1$ til $x = 3$. Det skriver også ut et estimat for integralet av funksjonen $f(x)$ fra $x = 1$ til $x = 3$. Estimatet er regnet ut med trapesmetoden og $N = 20$ delintervaller.

Størrelsen T er summen

$$f(1) + 2f(1 + d) + \cdots + 2f(3 - d) + f(3)$$

Derfor er $Td/2$ lik estimatet vi får ved å benytte trapesmetoden og N delintervaller.

Oppgave 11
Benytt numerisk integrasjon til å estimere det bestemte integralet

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\ \mathrm{d}x$$

Benytt trapesmetoden med tre delintervaller.

LF: Benytter vi trapesmetoden får vi at estimatet av integralet er

$$(\pi/2)/3 \cdot (1/2)(\sqrt{0} + 2\sqrt{\sin(\pi/6)} + 2\sqrt{\sin(\pi/3)}\sqrt{\sin(\pi/2)}) =$$

$$(\pi/12)(0 + 2\sqrt{1/2} + 2\sqrt{\sqrt{3}/2} + 1) = \frac{\pi(\sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{3}} + 1)}{12} \simeq 1.119$$

Oppgave 12
Finn Taylorpolynomet om $x = 0$ til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + 2 - x + 4x^5$$

til og med grad 4.

LF: Vi kan derivere funksjonen gjentatte ganger og sette $x = 0$. I dette tilfellet kan vi finne Taylor polynomet enda enklere. Vi har at

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Derfor er Taylor polynomet av orden 4 lik $1+x+x^2+x^3+x^4$. Taylor polynomet av orden 4 til et polynomet er den del av polynomet som er av grad mindre eller lik 4. Derfor er Taylor polynomet av orden 4 til $\frac{1}{1-x} + 2 - x + 4x^5$ gitt ved

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + 2 - x = 3 + x^2 + x^3 + x^4$$

Oppgave 13

Finn en likning som beskriver tangentlinjen til kurven gitt ved likningen

$$x^2 + 4y^2 = 5^2$$

(en ellipse) i punktet $(3, -2)$.

LF: Punktet $(3, -2)$ ligger på grafen siden $3^2 + 4(-2)^2 = 9 + 16 = 5^2$. Vi benytter implisitt derivasjon (det kan gjøres uten også). Vi deriverer begge sider av likhetstegnet med hensyn til x

$$2x + 8y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

Dette gir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{4y}$$

I punktet $(3, -2)$ er derfor stigningstallet til tangenten lik

$$-\frac{3}{4(-2)} = 3/8$$

En likning som beskriver tangentlinjen (har tangentlinjen som løsning) er derfor

$$y - (-2) = 3/8(x - 3)$$

Dette er det samme som

$$y = 3x/8 - 25/8$$

Oppgave 14

Torricellis lov sier at høyden h til væsken i en beholder med tverrsnittareal-funksjon $A(h)$ er styrt av følgende differensiallikning

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{a}{A(h)}\sqrt{2gh}$$

hvor g er gravitasjonskonstanten og a er arealet til åpningen i bunnen av beholderen.

a) Bestem høyden som en funksjon av tiden når beholderen er en sylinder med høyde H og konstant radius R. Ved tiden $t = 0$ er sylinderen helt full. Hvor lang tid tar det før alt vannet renner ut?

b) Bestem tverrsnittarealfunksjonene $A(h)$ som gjør at vannet renner ut slik at endringsraten til høyden blir konstant.

LF: a) En sylinder med radius R har konstant tverrsnittarealfunksjon gitt ved $A(h) = \pi R^2$. Differensiallikningen blir da

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{a}{\pi R^2}\sqrt{2gh} = -k\sqrt{h}$$

hvor konstanten k er lik $a\sqrt{2g}/\pi R^2$. Differnsiallikningen er separabel.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -k\,\mathrm{d}t$$

Vi integrerer og får

$$2\sqrt{h} = -kt + c$$

For en konstant c. Vi har gitt initialbetingelsen $h(0) = H$. Setter vi dette inn får vi

$$2\sqrt{H} = c$$

Vi setter dett inn for c, deler med 2 og kvadrerer og får

$$h(t) = (\sqrt{H} - kt/2)^2 = (\sqrt{H} - ta\sqrt{2g}/2\pi R^2)^2$$

Tiden det har for sylinderen å tømmes er løsningen til likningen $h(T) = 0$

$$T = c/k = \frac{2\pi R^2\sqrt{h}}{a\sqrt{2g}} = \frac{\pi R^2}{a}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

b) Endringsraten til høyden er konstant fører til at forholdet

$$\frac{\sqrt{h}}{A(h)}$$

er konstant. Da må tverrsnittarealet være proporsjonalt til $\sqrt{h}$. Hvis vi har en sylindersymmetrisk beholder vil det si at radien er proporsjonal til $\sqrt[4]{h}$.

Oppgave 15

Finn alle løsningene til differensiallikningen

$$y''(x) + y(x) = \sin(x).$$

LF: Den karakteristiske likningen til den tilhørende homogene differensiallikningen

$$y''(x) + y(x) = 0$$

er $r^2 + 1 = 0$. Løsningen er $r = \pm i$. LDe homogene løsningene er derfor $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ og $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$. De reelle løsningene er derfor på formen

$$y_h(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$$

Vi skal nå se etter en partikulær løsning. Vi forsøker med $f(x) = x\sin(x)$.

$$f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$$
$$f''(x) = \cos(x) + x(-\sin(x)) + \cos(x)$$

Vi har får derfor

$$f''(x) + f(x) = 2\cos(x)$$

Dette hjelper oss ikke. Vi forsøker med $f(x) = x\cos(x)$.

$$f'(x) = -x\sin(x) + \cos(x)$$
$$f''(x) = -\sin(x) - x(\cos(x)) - \sin(x)$$

Vi har får derfor

$$f''(x) + f(x) = -2\sin(x)$$

En partikulær løsning er derfor

$$y_p = -\frac{x\cos(x)}{2}$$

Løsningene til differensiallikningen er derfor

$$y(x) = -\frac{x\cos(x)}{2} + A\cos(x) + B\sin(x)$$

for reelle konstanter A og B.