Oppgave 1

a) Finn den deriverte av disse funksjonene:

   i) $f(x) = \sqrt{x}\cos x$

   ii) $g(x) = \frac{\ln x^2}{\sin x} + e^{3x}$.

b) Finn disse ubestemte integralene:

   i) $\int (\sqrt{x} + \sin(3x))\, dx$

   ii) $\int \frac{x^3}{x^2+1}\, dx$.

c) Finn disse bestemte integralene:

   i) $\int_{-1}^{1} x \sin x\, dx$

   ii) $\int_{-1}^{0} x^2 \sin(x^3+1)\, dx$.

Oppgave 2

a) Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases} \quad ,$$

bestem a slik at f blir en kontinuerlig funksjon for alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Hvorfor har funksjonen

$$g(x) = \cos x - 2x$$

ett – og bare ett – nullpunkt i intervallet $[0, \pi]$?

c) Hvordan kan vi ved å bruke tankegangen fra b) avgrense nullpunktet til eit så lite intervall som vi måtte ønske? Illustrér gjerne prinsippet ved å komme fram til eit intervall med lengde $\pi/8$ som inneholder nullpunktet.

Oppgave 3

a) Gitt disse matrisene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad ,$$

regn ut $A - B$, AB, BA og $2B - 3C$. Dersom noen av uttykkene ikke er definerte, skal du kort forklare hvorfor.

b) Regn ut determinanten til A, og bruk svaret til å forklare hvorfor A må vere invertibel.

c) Finn A^{-1}.

d) Hva må parametrene a og b oppfylle for at likningssystemet under ikke skal ha noen løsning (vere inkonsistent)?

$$\begin{aligned} 5x_1 + ax_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= b \quad . \end{aligned}$$

Oppgave 4

Følgende skript, som kan kjøres i Octave eller MATLAB, regner ut en sum:

```
1  % Grenser
2  a=0;
3  b=pi/2;
4
5  % Oppdeling
6  N=100;
7  dx=(b-a)/N;
8
9  % Initierer T
10 T=0;
11
12 % Summerer
13 for n=1:N
14   x=a+(n-1)*dx;
15   T=T+dx*sin(x)*exp(cos(x));
16 end
17
18 % Skriver resultatet til skjerm
19 T
```

Hva kaller vi en sum av denne typen? Om vi lar parameteren `N` i linje 6 få stadig høyere verdier, hvilken tallverdi vil `T` i linje 19 nærme seg?

Oppgave 5

Temperaturen i et ganske dårlig isolert lokale varierer med tida. Vi går ut fra at temeraturen er den same i hele lokalet og lar $T(t)$ være denne temperaturen, målt i Celcius-grader, etter t timer. Der er en ovn i lokalet som bidrar til å øke temperatruen. Ut fra blant annet Newtons avkjølingslov setter vi opp denne modellen:

$$T'(t) = -k(T(t) - T_{\text{ute}}) + P, \quad \text{med initialkravet} \quad T(0) = 22 \quad ,$$

der $k = 0.1$ og $T_{\text{ute}} = 10$ er ute-temperaturen (i °C), som vi går ut fra er konstant. P er proporsjonal med effekten til ovnen.

a) For at temperaturen skal holde seg på 22°C, hva må P vere?
(*Hint: Det er ikke nødvendig å løse differensiallikninga for å finne svaret på dette spørsmålet.*)

b) Løs initialverdiproblemet for $P = 0.5$. Initialkravet er det same som over, $T(0) = 22$.

c) Noen måneder senere bestemmer en seg for å isolere lokalet bedre. I vår modell fører dette til at vi må endre verdien for k. En dag etter at de har isolert viser det seg at temperaturen i lokalet faller fra 22°C til 16°C på 10 timer. Ovnen var slått av ($P = 0$) og utetemperaturen var 8°C i denne perioden.

   Bruk disse opplysningene til å bestemme den nye k-verdien.

Oppgave 6

a) Transformasjonen T frå $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^4$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \quad .$$

   Transformasjonen kan skrives som en matrisemultiplikasjon,

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad ,$$

   der matrisa A blir kalt standardmatrisa til T. Finn A.

b) En annen lineær transformasjon S fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$ oppfyller følgende:

$$S\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad S\left(\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \\ 26 \end{bmatrix} \quad .$$

   Bruk dette til å finne standardmatrisa til S.

Oppgave 7

a) Finn den generelle løsninga av denne differentiallikninga:

$$y'' - 2y' + 5y = \sin x \quad .$$

b) Skriptet nedenfor, som kan kjøres i Octave eller MATLAB, estimerer løsninga av et initialverdiproblem. Hvilket er det?

Akkurat dette initialverdiproblemet kan løses eksakt. Finn denne eksakte løsninga.

```
x0=0;             % Startverdi for x
xSlutt=5;         % Sluttverdi for x
y0=1;             % Startverdi for y

N=100;            % Antall steg
h=(xSlutt-x0)/N;          % Steglengde

xVektor=x0:h:xSlutt;      % Vektor med x-verdier
yVektor(1)=y0;

for n=1:N
  xn=xVektor(n);
  yn=yVektor(n);
  yD=cos(3*xn)/yn;
  yVektor(n+1)=yn+yD*h;   % Bestemmer  neste y-verdi
end

plot(xVektor,yVektor)     % Plotter resultatet
```