Oppgave

a) (i) $f'(x) = \underline{\cos x + 2x}$

(ii) $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$

$= \underline{x e^x - e^x + C}$

b) (i) $8e^{-\frac{3\pi}{2}i} = 8(\cos(-\frac{3\pi}{2}) + i\sin(-\frac{3\pi}{2}))$

$= 8(0 + i \cdot 1) = \underline{0 + 8i}$

(ii) $w = -1 + i$

$r^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2 \rightarrow r = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{1}{-1} = -1$ og θ i 2. kvadrant

$\rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$

$\rightarrow w = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$

Oppgave

a) $\ln(4-x^2)$ er bare definert for $4-x^2>0$

$\rightarrow \quad x \in (-2,2)$.

$\frac{1}{\sin x}$ er bare definert for $\sin x \neq 0$

$\rightarrow \quad x \neq \pi k \quad , k \in \mathbb{Z}$

Svar: $\underline{D_f = (-2,0) \cup (0,2)}$.

b) En funksjon f er injektiv hvis $f(x) = f(y)$ impliserer $x = y$ for alle $x, y \in D_f$.

$$g'(x) = \frac{1(4-x) - (x+3)(-1)}{(4-x)^2}$$

$$= \frac{4-x+x+3}{(4-x)^2} = \frac{7}{(4-x)^2}$$

$g'(x) > 0$ for alle $x \in D_g$, så g er strengt voksende og derfor injektiv.

Finner g^{-1} ved å løse likningen mht. y:

$$g(y) = x$$

$$\frac{y+3}{4-y} = x$$

$$y+3 = x(4-y)$$

$$y + xy = 4x - 3$$

$$y(1+x) = 4x-3$$

$$y = \frac{4x-3}{1+x}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{4x-3}{1+x}$$

Verdimengden til g:

$$V_g = \{ g(x) \mid x \in D_g \}$$

$$= \left\{ \frac{x+3}{4-x} \mid x > 4 \right\}$$

Vet allerede at g er strengt voksende og kontinuerlig på $(4, \infty)$.

Ser på de ensidige grenseverdiene:

$$\lim_{x \to 4^+} g(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{x+3}{4-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x+3}{4-x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 + 3/x}{4/x - 1} = -1.$$

g tar altså vilkårlig store negative verdier, og verdier vilkårlig nær -1 men ikke mindre enn -1. Ved skjæringssetningen vil g også ta alle mellomliggende verdier, så

$$\underline{V_g = (-\infty, -1).} \qquad \underline{D_{g^{-1}} = V_g.}$$

Oppgave.

$$f'(x) = \sqrt{3}e^{\sqrt{3}x}\sin x + e^{\sqrt{3}x}\cos x$$

$$= e^{\sqrt{3}x}(\sqrt{3}\sin x + \cos x)$$

$$= 0$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$$

$$\rightarrow \quad \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x \in [0, \pi) \rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = e^{\frac{5\pi}{6}\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{\frac{5\sqrt{3}\pi}{6}} > 0.$$

$$f(0) = e^0 \sin 0 = 0$$

$$f(\pi) = e^{\sqrt{3}}\sin \pi = 0$$

Globalt max: $x = \frac{5\pi}{6}$, $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{5\sqrt{3}\pi}{6}}$

Globalt min: $x = 0$, $f(x) = 0$.

$x = \pi$, $f(x) = 0$.

Oppgave

a) $y' = y + 5e^{x}$

$y' - y = 5e^{x}$

$y'e^{-x} - e^{-x}y = 5$

$(ye^{-x})' = 5$

$ye^{-x} = 5x + C$

$\underline{y = 5xe^{x} + Ce^{x}}$

b) $y'' - y = x$

K.l: $r^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow r = \pm 1$

$y_h = Ce^{x} + De^{-x}$

$y_p = Ax + B \qquad y_p' = A, \; y_p'' = 0$

$y_p'' - y_p = x$

$-(Ax+B) = x \quad \rightarrow \quad B = 0, \; A = -1$

$\rightarrow \; y_p = -x$

Generell løsning:

$$y = y_h + y_p = Ce^x + De^{-x} - x$$

$$\rightarrow y'(x) = Ce^x - De^{-x} - 1$$

Initialbetingelser:

$$1 = y(0) = C + D - 0 = C + D \rightarrow C = 1 - D$$

$$1 = y'(0) = C - D - 1$$

$$\rightarrow 1 = 1 - D - D - 1$$

$$\rightarrow 1 = -2D$$

$$\rightarrow D = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow C = 1 - D = 1 + 1/2 = 3/2$$

Svar: $y = \frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - x$

Oppgave

a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

Bytter rad 1 og 3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ 1\cdot \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ \cdot 3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \cdot -2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot -\frac{1}{2} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Dvs

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \underset{3\times3}{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}} \underset{3\times2}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 8 & 2 \\ 20 & 6 \end{bmatrix}}}$$

BA er ikke definert da multiplikasjon kun er mulig hvis antallet kolonner i den venstre matrisen (B) er lik antall rader i den høyre matrisen (A).

(b) Vektorene er lineært uavhengige hvis og bare hvis ligningen

$$x_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}4\\2\\4\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}2\\2\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

kun har den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Trekker sammen vektorene

$$\begin{bmatrix} 4x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 \quad 4x_2 + 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 4 & 2\\0 & 2 & 2\\1 & 4 & 6\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \Big| \cdot A^{-1}$$

→ A fra deloppgave a)

NB!
Oppgaven kan også løses ved å regne ut og evaluere determinanten til A.

$$\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4 & 2\\0 & 2 & 2\\1 & 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Dvs $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

som betyr at vektorene er lin. uavh.

c) Systemet har en entydig løsning hvis og bare hvis

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & k & 6 \\ 4 & 1 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$= 4 \begin{vmatrix} k & 6 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix} = 4(k(k-1)-6) =$$

$$= 4k^2 - 4k - 24$$

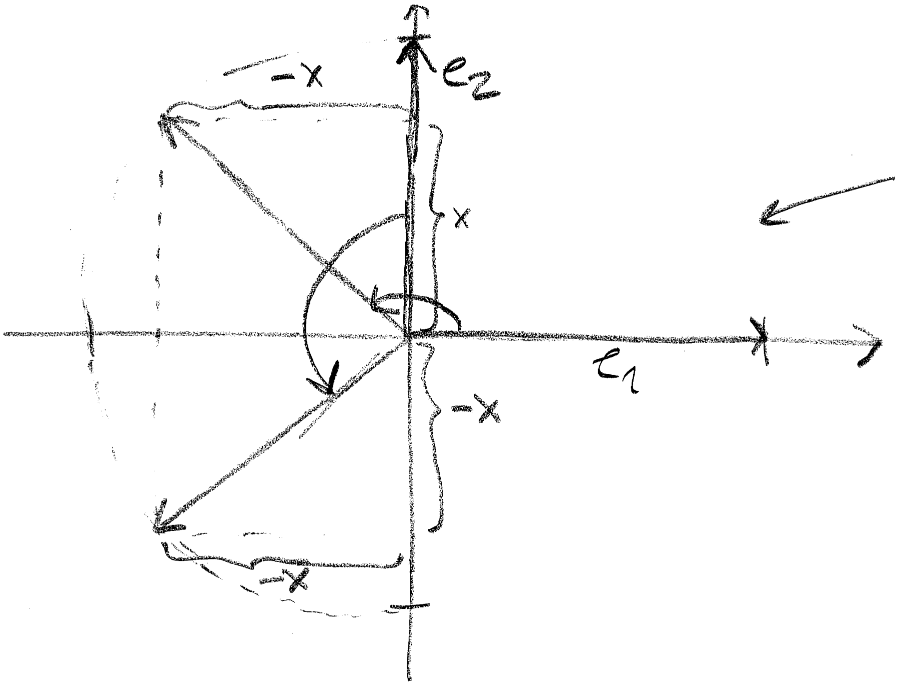
Finner nullpunkter

$$4k^2 - 4k - 24 = 0$$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4(-24)}}{8} = \frac{4 \pm 20}{8}$$ gir $k = -2 \vee k = 3$

Dvs at systemet har entydig løsning for alle k ulik -2 og 3.

d)



$\frac{3\pi}{4}$ rotasjon av enhetsvektorene

Pytagoras $\sqrt{x^2+(-x^2)}=1 \Rightarrow \sqrt{2x^2}=1 \Rightarrow \sqrt{2}\,x=1$
$\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Dvs $T(e_1)=T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

$T(e_2)=T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

Fra teorem 10 i kap 1.9 i Lay har vi at

$$T=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

Oppgave

$$V = \int_0^{\sqrt{\pi/4}} 2\pi x \cos(x^2)\,dx - \int_0^{\sqrt{\pi/4}} 2\pi x \sin(x^2)\,dx =$$

Substitusjon: $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

finner ved å sette inn her

$$= \int_{u=0}^{u=\pi/4} \cancel{2}\pi \cancel{x} \cos(u)\,\frac{du}{\cancel{2x}} - \int_{u=0}^{u=\pi/4} 2\pi x \sin(u)\,\frac{du}{2x}$$

$$= \Big[\pi \sin(u)\Big]_0^{\pi/4} - \Big[-\pi\cos(u)\Big]_0^{\pi/4} =$$

$$= \pi \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi \sin(0) + \pi\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi\cos(0)$$

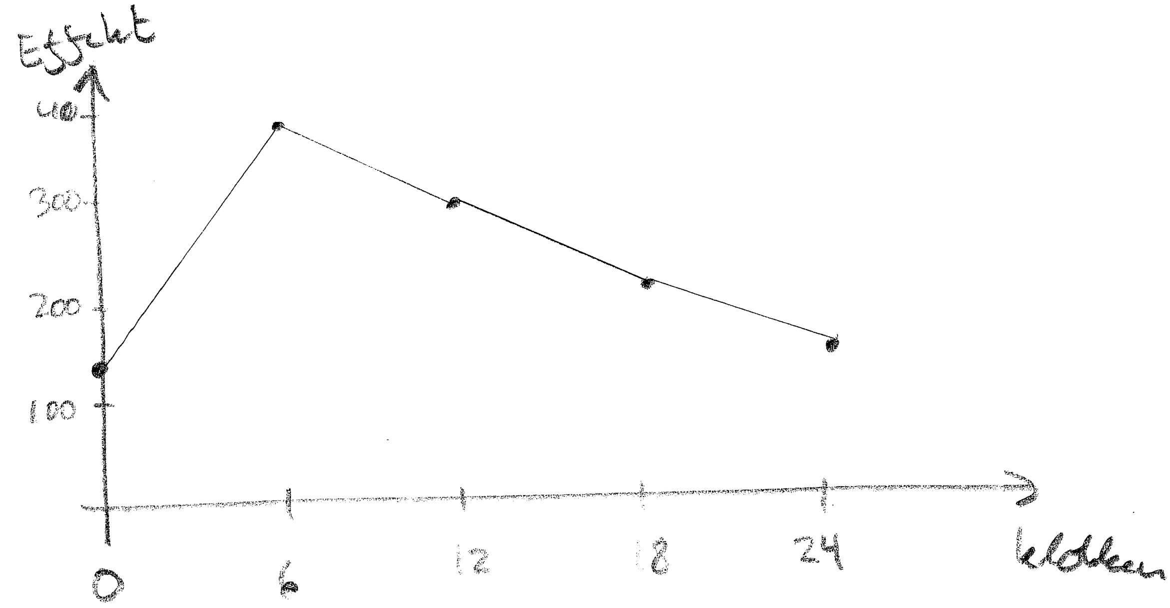
$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} - 0 + \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \pi = 2\frac{\pi}{\sqrt{2}} - \pi = \underline{\underline{\sqrt{2}\pi - \pi}}$$

Oppgave

a) $\frac{\Delta E}{\Delta t}(3{:}00) = \frac{E(6{:}00) - E(0{:}00)}{6} = \frac{380 - 140}{6} = \underline{\underline{40}}$

$\frac{\Delta E}{\Delta t}(12{:}00) = \frac{E(18{:}00) - E(6{:}00)}{12} = \underline{\underline{-13{,}3}}$

b)



Energi forbrukt er Effekt x tid, altså arealet under kurven for effekt hvis vi hadde kjent den i alle tidspunkter. Vi estimerer med Trapes-metoden

%

$\Delta x = 6$ timer

$$T_4 = \frac{6}{2}(140 + 2 \cdot 380 + 2 \cdot 310 + 2 \cdot 220 + 150)$$

$$= \underline{\underline{6330 \text{ MJ}}}$$

Oppgave

a) I første iterasjon er p=0 initielt, dermed er if statement (p<5) til fredsstilt og vi legger til 2. Dermed har vi

Etter iterasjon nummer	Verdi p
0	2
1	4
2	6
3	9
4	12
5	15
Etter skript kjørt	15

b) Koden er en Riemannsum for å beregne integralet $\int_0^2 xe^{x^2}dx$. En omtrentlig verdi er dermed den korrekte verdien til

$$\int_0^2 xe^{x^2}dx = \int_0^4 xe^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int_0^4 e^u du = \frac{1}{2}\Big[e^u\Big]_0^4 =$$

$u=x^2 \quad dx = \frac{2x}{du}$ $\quad = \underline{\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} \approx 26.7991}$