Oppgave 1

a) i) Regn ut den deriverte av funksjonen

$$f(x) = \sin(x) + x^2$$

ii) Regn ut det ubestemte integralet

$$\int xe^x \mathrm{d}x$$

b) i) Skriv det komplekse tallet

$$z = 8e^{-\frac{3\pi}{2}i}$$

på kartesisk form.

ii) Skriv

$$w = -1 + i$$

på polarform.

Oppgave 2

a) Finn den naturlige definisjonsmengden til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \ln(4 - x^2) + \frac{1}{\sin x}.$$

b) Forklar hva det vil si at en funksjon er injektiv (en-entydig). Vis at funksjonen g gitt ved

$$g(x) = \frac{x+3}{4-x}$$

med definisjonsmengde $D_g = (4, \infty)$ er injektiv. Finn verdimengden til g, og finn et uttrykk for den inverse funksjonen g^{-1}. Hva er definisjonsmengden til g^{-1}?

c) Bestem grenseverdiene

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

ii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

iii) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{\sin(\pi x)}$

Oppgave 3

Gitt funksjonen

$$f(x) = e^{\sqrt{3}x} \sin x$$

Finn alle globale ekstremalpunkter i intervallet $[0, \pi]$. Oppgi både argumentverdi ("x-verdi") og funksjonsverdi for hvert punkt.

Oppgave 4

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen

$$y' = y + 5e^x.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - y = x, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

Oppgave 5

a) Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Regn ut A^{-1}, AB og BA. Dersom noen av uttrykkene ikke er definerte, skal du kort forklare hvorfor.

b) Avgjør om vektorene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

c) Dette ligningssystemet er gitt

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & k & 6 \\ 4 & 1 & k-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finn verdiene av k som gir ligningssystemet en entydig løsning.

d) Regn ut standardmatrisen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som representerer en $\frac{3\pi}{4}$ rotasjon mot klokken i xy-planet.

Oppgave 6

Regn ut volumet når området avgrenset av y-aksen, grafene til de to funksjonene $f(x) = \sin(x^2)$ og $g(x) = \cos(x^2)$ og $x = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ roteres om y-aksen.

Oppgave 7

Effekten (megajoule/time) som benyttes for å holde et kontorbygg tilfredsstillende varmt en kald vinterdag er ved fem tidspunkter gjennom et døgn gitt ved

Tidspunkt	kl 0:00	kl 6:00	kl 12:00	kl 18:00	kl 0:00 (neste døgn)
Effekt (MJ/time)	140	380	310	220	150

a) Gjør et overslag over hvor fort effekten endrer seg klokken 03:00 og klokken 12:00.

b) Bruk trapesmetoden til å estimere hvor mye energi (megajoule) kontorbygget totalt har forbrukt gjennom døgnet.

Oppgave 8

a) Oppgi verdien til `p` etter hver iterasjon av while-løkken og etter at skriptet er kjørt.

```
i=0;
p=0;
while i<5.5
    if p<5
        p = p+2;
    else
        p = p+3;
    end
    i=i+1;
end
```

b) Oppgi en omtrentlig verdi for variabelen `rsum` etter at følgende skript er kjørt. Begrunn svaret.

```
a = 0; % starten på intervall
b = 2; % slutten på intervall
n = 10000 % antall intervaller
dx = (b - a)/n;
rsum = 0;
for i = 0:(n-1)
    xi = a + i*dx;
    rsum = rsum + xi*exp(xi^2)*dx;
end
rsum
```