# Løysingsforslag

## Oppg. 1

a) i) $7^x = 3 \cdot 2^x$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x = 3$$

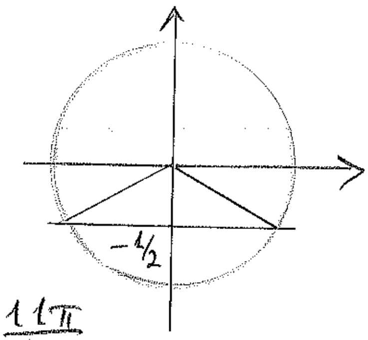
$$x \ln \frac{7}{2} = \ln 3$$

$$x = \frac{\ln 3}{\ln \frac{7}{2}} = \underline{\underline{\frac{\ln 3}{\ln 7 - \ln 2}}}$$

ii) $2 \sin x + 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$




$x \in [0, 2\pi)$

$$x = \pi + \frac{\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{7\pi}{6}}} \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \underline{\underline{\frac{11\pi}{6}}}$$

b) i) $f(x) = x^2 \cos(x^2)$

$$f'(x) = (x^2)' \cos(x^2) + x^2 (\cos(x^2))' =$$

$$2x \cos(x^2) + x^2 (-\sin(x^2)) \cdot (x^2)' =$$

$$2x\ \cos(x^2) - x^2 \sin(x^2) \cdot 2x =$$

$$\underline{\underline{2x\ \cos(x^2) - 2x^3 \sin(x^2)}}$$

ii) $g(x) = \ln(x^2) + (\ln x)^2$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' + 2\ln x \cdot (\ln x)' =$$

$$\frac{2x}{x^2} + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} + \frac{2\ln x}{x} = \underline{\underline{\frac{2(1+\ln x)}{x}}}$$

c) i) $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx =$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \arctan\frac{x}{2} + C =$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C}}$$

ii) $\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$

Vi faktoriserar nemnaren ved hjelp av 3. kvadratsetning: $x^2-4 = (x-2)(x+2)$

Delbrøkesopspalting: $\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A-2B}{x^2-4}$$

$$\begin{Bmatrix} A+B=0 \\ 2A-2B=1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} B=-A \\ 2A-2(-A)=1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}\right) dx =$$

$$\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{1}{4}\left(\ln|x-2| - \ln|x+2|\right) + C =$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C}}$$

d) i) $\int_0^1 x\, e^{2x^2}\,dx$

Variabelbyte: $u = 2x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x,\ dx = \frac{1}{4x}du$

$u(0) = 0,\quad u(1) = 2$

$$\int_0^1 x\, e^{2x^2}\,dx = \int_0^2 x\, e^u \frac{1}{4x}\,du = \frac{1}{4}\int_0^2 e^u\,du =$$

$$\frac{1}{4}\left[e^u\right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}(e^2-1)}}$$

ii) $\int_0^1 t \sin(\pi t)\,dt$

Delvis integrasjon: $\int_a^b u v'\,dt = [uv]_a^b - \int_a^b u' v\,dt$

$u = t \Rightarrow u' = 1$

$v' = \sin(\pi t) \Leftarrow v = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)$

$$\int_0^1 t \sin(\pi t)\,dt = \left[t \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right)\cos(\pi t)\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \left(-\frac{1}{\pi}\right)\cos(\pi t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(1 \cdot \cos(\pi) - 0\right) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi t)\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}(\sin\pi - \sin 0) = \underline{\underline{\frac{1}{\pi}}}$$

## Oppg. 2

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sidan $A$ og $B$ har ulike format, er $\underline{A+B \text{ udefinert}}$.

$$C-2B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\cdot(-2) & 0 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & -2 & 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}}}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3\cdot(-2)+4\cdot 3 & -3\cdot 0+4\cdot(-1) & -3\cdot 1+4\cdot 2 \\ -2\cdot(-2)+3\cdot 3 & -2\cdot 0+3\cdot(-1) & -2\cdot 1+3\cdot 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 18 & -4 & 5 \\ 13 & -3 & 4 \end{pmatrix}}}$$

$B$ har 3 søyler og $C$ har 2 rekker. Difor er $\underline{\text{ikkje produktet } BC \text{ definert}}$.

b)

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3\cdot 3 - 4\cdot(-2) = \underline{\underline{-1}} \neq 0$$

Sidan $\det A \neq 0$, er $A$ invertibel; $\underline{A^{-1} \text{ eksisterar}}$.

$$(A \mid I_2) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{0} \\ 1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = (I_2 \mid A^{-1})$$

$$A^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}} = A$$

Kontroll:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & -12+12 \\ 6-6 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$A$ er altså si eiga inversmatrise.

c)

$$AX + 2B = C$$

$$AX + 2B - 2B = C - 2B$$

$$AX = C - 2B$$

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot (C - 2B)$$

$$X = A^{-1} \cdot (C - 2B)$$

Vi fann $C - 2B$ i deloppgåve a og $A^{-1}$ i deloppgåve b:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -27-24 & -3+12 & -12 \\ -18-18 & -2+9 & -9 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -51 & 9 & -12 \\ -36 & 7 & -9 \end{pmatrix}}}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & s+1 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & s+4 & 3s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Totalmatrise med $s=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \\ \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Av den nedersterekka ser vi at likningssystemet er <u>inkonsistent</u>.

e) Vi har eintydig løysing hvis, og berre hvis, determinanten til koeffisient-matrisa er ulik 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & s+1 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & s+4 & 3s-1 \end{vmatrix} \cdot (-2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & s+1 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & s & s-3 \end{vmatrix} =$$

$$+1 \begin{vmatrix} s & -1 \\ s & s-3 \end{vmatrix} = s(s-3) - s\cdot(-1) = s(s-3+1) =$$

$$s(s-2)$$

Vi ser at vi får eintydig løysing når $\underline{s \notin \{0, 2\}}$

f) Diagonalisering: $\underline{A = P D P^{-1}}$

$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ der $\lambda_1, \lambda_2$ er eigenverdiar.

$P = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2)$ der $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ er lineært uavhengige eigenvektorar.

Karakteristisk likning:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff 0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-3-\lambda)(3-\lambda) - (-2)\cdot 4 = -(3+\lambda)(3-\lambda) + 8 =$$

$$-(9-\lambda^2) + 8 = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

Eigenverdiar: $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = +1$

Eigenvektor for $\lambda_1 = -1$:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -3-(-1) & 4 \\ -2 & 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \leftarrow -\frac{1}{2} \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 - 2x_2 = 0, \quad x_1 = 2x_2$

$\vec{x} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, vel $x_2 = 1$, slik at $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor for $\lambda_2 = 1$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -3-1 & 4 \\ -2 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{0} \\ -2 \leftarrow -\frac{1}{2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = x_2$, $\vec{x} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vel $x_2 = 1$ slik at $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Altså: $\underline{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ og } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

Kontroll: $A = PDP^{-1} \Rightarrow AP = PD$

$$AP = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppg. 3

$$v(t) = 60(1 - e^{-0.070t}), \quad D_v = [0, 40]$$

a) Skal ha: $v(t) = 30$

$$60(1 - e^{-0.070t}) = 30$$

$$1 - e^{-0.070t} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-0.070t} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$-0.070t = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.070} \approx \frac{0.693}{0.070} \approx 10$$

Bilen når 30 m/s etter $\frac{\ln 2}{0.070}$ s $\approx 10$ s.

b) Køyrelengda er gitt ved det bestemte integralet $\int_0^{40} v(t)\,dt$

$$\int_0^{40} v(t)\,dt = \int_0^{40} 60(1 - e^{-0.070t})\,dt =$$

$$60\left[t - \frac{1}{-0.070} e^{-0.070t}\right]_0^{40} =$$

$$60\left[40 + \frac{1}{0.070} e^{-0.070 \cdot 40} - \left(0 + \frac{1}{0.070} \cdot e^{0}\right)\right] =$$

$$2400 - \frac{60}{0.070}(1 - e^{-2.8}) =$$

$$2400 - \frac{6000}{7}(1 - e^{-2.8}) \quad (\approx 1600)$$

Bilen har køyrt $\left(2400 - \frac{6000}{7}(1 - e^{-2.8})\right)$ m

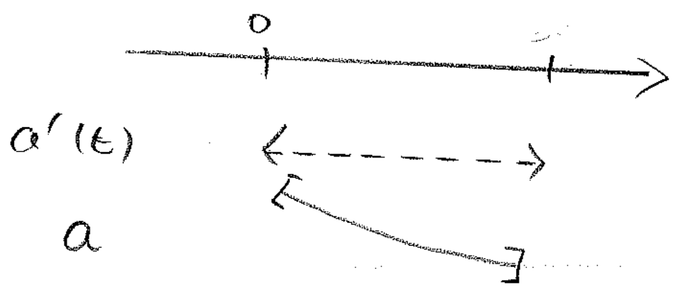
c) $a(t) = v'(t) = \left(60 - 60e^{-0.070t}\right)' =$

$-60 \cdot (-0.07)\, e^{-0.070t} = 4.2\, e^{-0.070t}$

$a'(t) = 4.2 \cdot (-0.070)\, e^{-0.070t} = -2.94\, e^{-0.070t} < 0$

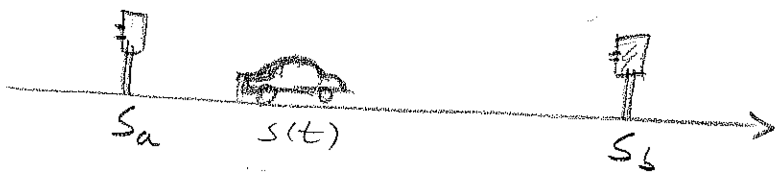
$a'(t)$ er alltid negativ. Difor er $a(t)$ alltid avtakande og randpunkta blir globale ekstremalpunkt.

Forteiknskjema:




$a(t)$ er største for $t=0$ og minst for $t=40$

d)




Vi lar $s(t)$ vere så langt bilen har køyrt ved tida $t$. $\ell = s_b - s_a$ lengda av vegstrekka. Gjennomsnittsfarten blir då $\bar{v} = \dfrac{s(b) - s(a)}{b - a}$

a er tidspunktet bilen passerar den fyrste fotoboksen, bilen passerar den andre ved $t = b$.

Sekantsetninga seier at dersom $s(t)$ er kontinuerleg på $[a, b]$ og deriverbar på $(a, b)$, vil det finnast ein $c \in (a, b)$ slik at

$$s'(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} = \bar{v}.$$

Sidan $s'(t)$ blir farten $v(t)$, må farten altså ha vore gjennomsnittsfarten $\bar{v}$ på minst eit tidspunkt.

Vi kan gå ut frå at $s(t)$ er kontinuerleg sidan bilen ikkje kan plutseleg vere ein annan stad. Tilsvarande kan heller ikkje farten endre seg diskontinuerleg; altså må s også vere deriverbar.

# Oppg. 4

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{v}_1 | \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 7 - 5 \cdot 1 = 9 \neq 0$$

Determinanten til matrisa som har $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ som søyler er ulik $0 \Leftrightarrow$
<u>$\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er lineært uavhengige.</u> (q.e.d.)

Skal ha:

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 \\ 0 & -9 & 27 \end{pmatrix} \leftarrow -\frac{1}{9} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{0} \\ -5 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad c_1 = 5 \text{ og } c_2 = -3$$

Altså:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{5\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2}}$$

b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

T er lineær:

$$T\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = T(-3\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2) = -3T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_2) =$$

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 4 + 5 \\ -3 \cdot 3 + 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix}}}$$

Oppg. 5

a) $y'' + y' - 2y = e^x$

Om vi har den generelle løysinga $y_h$ av den homogene differensiallikninga $y'' + y' - 2y = e^x$, vil den generelle løysinga kunne skrivast som $y = y_h + y_p$ der $y_p$ er ei partikulær løysing av den inhomogene differensial-likninga over.

Vi løyser $y'' + y' - 2y = 0$:

Antar at $y = e^{rt}$

$\Rightarrow y' = re^{rt} \wedge y'' = r^2 e^{rt}$

$r^2 e^{rt} + re^{rt} - 2e^{rt} = 0 \Leftrightarrow$

$(r^2 + r - 2)e^{rt} = 0 \Leftrightarrow r^2 + r - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$r = \frac{-1-3}{2} = -2 \quad \vee \quad r = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Generell løysing av homogen likning:

$y_h = Ae^{-2x} + Be^x$

Partikulær løysing:

Om vi antar $y_p = Ce^x$, får vi

ein funksjon som alt er inkludert i $y_h$ (med $A=0$ og $B=C_1$).

Vi antar at $y_p = C_1 x e^x$

$y_p' = C_1 e^x + C_1 x e^x$

$y_p'' = C_1 e^x + C_1 e^x + C_1 x e^x = 2C_1 e^x + C_1 x e^x$

Set inn:

$2C_1 e^x + C_1 x e^x + C_1 e^x + C_1 x e^x - 2C_1 x e^x = e^x$

$3C_1 e^x = e^x$

$3C_1 = 1$

$C_1 = 1/3$

$y_p = \frac{1}{3} x e^x$

Generell løysing: $\underline{\underline{y = Ae^{-2x} + Be^x + \frac{1}{3} x e^x}}$

b) $\frac{dy}{dx} - y \sin x = 0$

$\frac{dy}{dx} = y \sin x$

$\frac{dy}{y} = \sin x \, dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int \sin x \, dx$

$\ln |y| = -\cos x + C_1'$

$e^{\ln|y|} = e^{-\cos x + C_1'} = e^{C_1'} \cdot e^{-\cos x}$

$$|y| = e^{C'} e^{-\cos x}$$

$$y = \pm e^{C'} e^{-\cos x}$$

$$\underline{\underline{y = C\, e^{-\cos x}}} \qquad (C = \pm e^{C'})$$

c)

$$x y' + y = \frac{x}{x^2+1}$$

$$(xy)' = \frac{x}{x^2+1}$$

$$xy = \int \frac{x}{x^2+1}\, dx$$

Variabelbytte: $u = x^2+1, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x} du$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x}{u} \frac{1}{2x}\, du = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} =$$

$$\frac{1}{2} \ln u + C' = \ln \sqrt{x^2+1} + C$$

$$xy = \ln \sqrt{x^2+1} + C$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{x} \ln \sqrt{x^2+1} + \frac{C}{x}}}$$