Kontinuasjonseksamen i	matematikk 1000, FO010A
Dato	17. november
Tid	9:00 til 14:00
Målføre:	Nynorsk
Talet på oppgåver:	4
Talet på sider:	4
Hjelpemiddel:	Formelark (utdelt)

Ein skal grunngi alle svar. Alle del-oppgåver har lik vekt.

Oppgåve 1

a) Derivér desse funksjonane

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x}\cos x \\ g(x) &= \frac{\sin x^2}{\ln x} \ . \end{aligned}$$

b) Finn likninga for tangenten til kurva gitt ved

$$\left(\frac{x}{4}\right)^4 + \left(\frac{y}{2}\right)^4 = 1$$

i punktet $P = (2, \sqrt[4]{15})$.

c) Bestem desse integrala

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$$

$$\int_0^{\pi/9} \frac{\sin(3x)}{\cos^4(3x)}\, dx \ .$$

d) Bestem desse grenseverdiane dersom dei eksisterar

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2} - 1}{\tan(x^2 - 4)}$$

$$\lim_{x\to \infty} x \sin\frac{1}{x} \ .$$

Oppgåve 2

a) Finn determinanten til matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Forklar, ut frå svaret, kvifor A er inverterbar.

b) Bestem A^{-1}.

c) Løys likningssettet gitt ved

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Gitt matrisa

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

rekn ut matrisene AB, BA og A^2 – dersom desse matrisene er veldefinerte.

e) Bestem integralet

$$\int \frac{3x^2+1}{(x^2+1)(x-1)}\,dx \quad .$$

Hint: Om du gjer denne delbrøksoppspaltinga:

$$\frac{3x^2+1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1} \quad ,$$

får du det same likningssettet som i deloppgåve *c)*.

Oppgåve 3

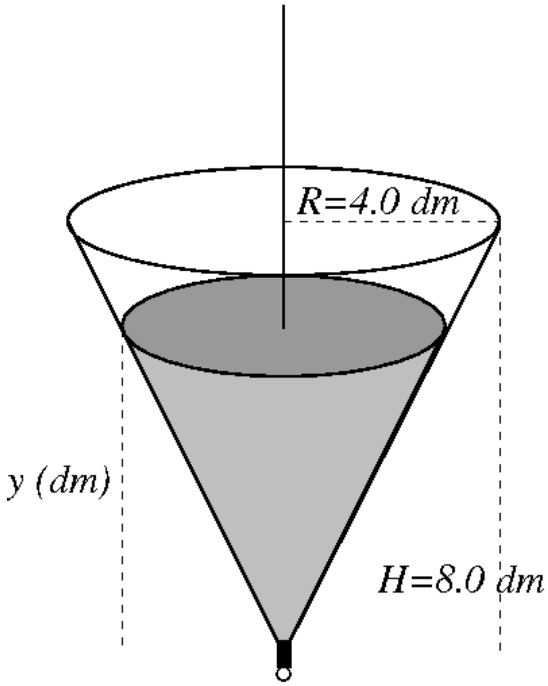
a) Eit kar skal fyllast med vatn. Vi fyller i vatn med en slange som gir $f(t)$ desiliter vatn per sekund der funksjonen

$$f(t) = \frac{1}{2}(t+10)e^{-t/10} \quad ,$$

og tida t er gitt i sekund. Kor mykje vatn er der i karet til slutt når vi startar å fylle ved $t=0$ og sluttar etter eitt minutt ($t=60$)?

b) Karet har form som ei snudd kjegle med radius $R = 40$ cm og høgd $H = 80$ cm (sjå figuren). Volumet av kjegla blir såleis $V_k = \pi/3 \cdot R^2 H$. Om vi lar y vere høgda av vatnet i kjelga, forklar kvifor volumet av vatnet er gitt ved

$$V = \frac{\pi}{12} y^3 \quad .$$



c) Etter å ha fylt karet heilt opp drar vi ut ein propp i enden av kjegla. (Du kan gå ut frå at proppen er så liten at fasongen av karet ikkje vert påverka av dette.) Rett etter at proppen er dratt ut, avtar vassmengda med $\frac{1}{160}$ l/s = 0.00625 l/s (eininga "l/s" er liter per sekund). Bruk desse opplysingane saman med uttrykket over til å bestemme kor fort vasshøgda minkar på dette tidspunktet. (Hugs at 1 l= 1 dm^3.)

d) Dersom proppen har diameteren 1.0 cm, kan vi vise at vasshøgda gitt i dm, $y(t)$, tilnerma følgjer differensiallikninga

$$-\frac{\sqrt{2}}{10}\sqrt{y} = y^2\, y' \quad .$$

(Du skal ikkje vise dette.) Bruk opplysingane over, saman med initialkravet på y i deloppgåve *c)*, til å finne $y(t)$.

e) No tenkjer vi oss ein ny situasjon der det ikkje er vatn i karet i utgongspunktet, og vi fyller med ein slange som gir 2.5 desiliter per sekund. y oppfyller då differensiallikninga

$$-\frac{\sqrt{2}\pi}{40}\sqrt{y} + 0.25 = \frac{\pi}{4}y^2 y' \quad .$$

Du skal ikkje løyse denne. Det som vil skje, er at vasshøgda y vi stige heilt til vatnet renn like fort ut som inn. Kva vil då y' nerme seg? Bruk dette svaret saman med differensiallikninga over til å finne ut kva y vil nerme seg.

Oppgåve 4

a) Løys initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad .$$

b) Finn alle eigenverdiar med tilhøyrande eigenvektorar for matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad .$$

c) Løys initialverdiproblemet

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

d) Det er mogeleg å omforme dei kopla differensiallikningane i deloppgåve *c)* til eit initialverdiproblem i berre x. Vis korleis ein kan gjere dette. (Hint: Differensiallikninga blir av andre orden.)