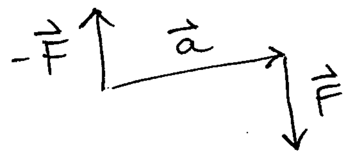
4 mars 09

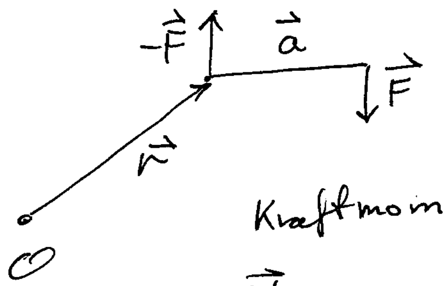
Kraftpar



Kraftmomentet til Kraftparet er $\vec{M} = \vec{a} \times \vec{F}$

(her: retningen til $\vec{M}$ er inn mot arket).

Dette er uavhengig av referansepunktet $\vec{O}$.



Kraftmomentet (om O)

$$\vec{M} = \vec{r} \times (-\vec{F}) + (\vec{r} + \vec{a}) \times \vec{F}$$

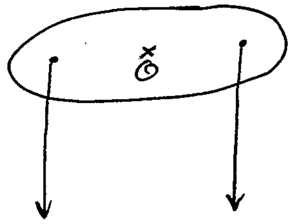
$$= \underbrace{-\vec{r} \times \vec{F} + \vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{0}} + \vec{a} \times \vec{F}$$

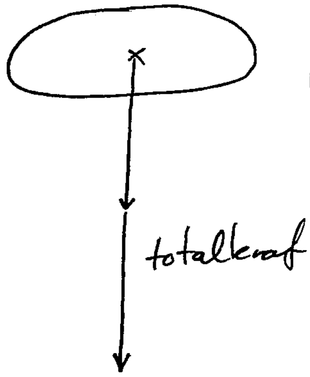
$$\underline{\vec{M} = \vec{a} \times \vec{F}}$$

<u>Resultat</u> Et system av krefter som virker på et stive legemet kan forenkles til en totalkraft som virker på et utvalgt punkt O og et kraft par.

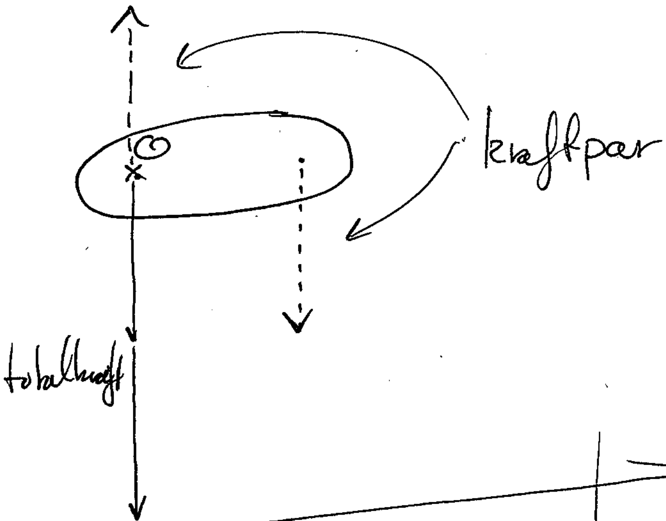
Typisk velges O til å være massesenteret.

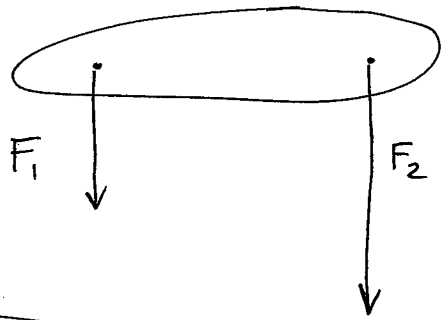
<u>eksempler</u> →

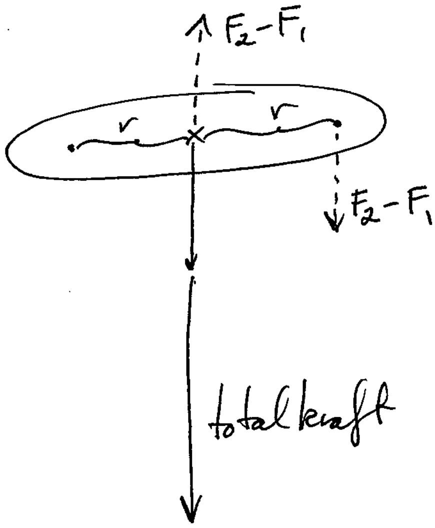




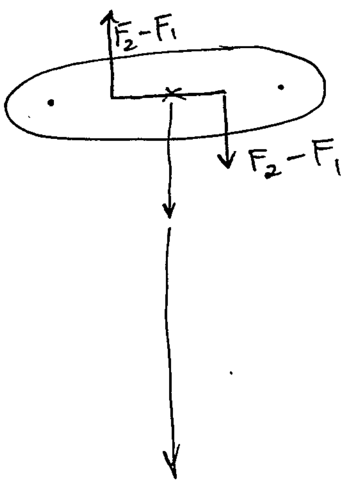
(kraftparet er null-kraftparet)







Alternativt



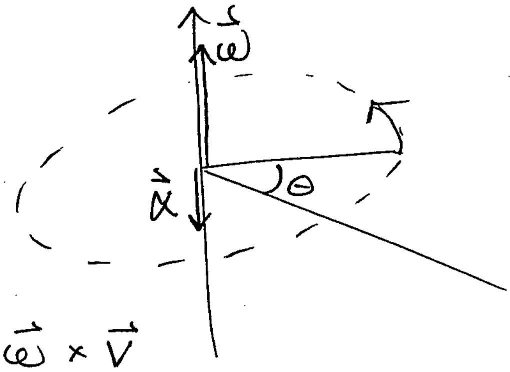
Rotasjon av et stivt legeme rundt en fast akse.

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha} \leftarrow \text{vinkelakselerasjon}$$

$\vec{\text{Kraftmoment}}$ ↑ treghetsmoment

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$



$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}$$

Akselerasjonen $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}\right) \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$(\vec{a}_T) \qquad (\vec{a}_N)$$

$$\left(\vec{\omega} \times (\vec{v}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -|\vec{\omega}|^2 \vec{r} + (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\,\vec{\omega} \right.$$

$$\left. = -|\vec{\omega}|^2 \vec{r} \quad \text{hvis } \vec{\omega} \text{ og } \vec{r} \text{ er ortogonale} \right)$$

$(\to \vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0)$

Plant legeme $\quad \vec{M} = \Sigma_i \, \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \Sigma_i \, \vec{r}_i \times \vec{a}_i \cdot m_i$

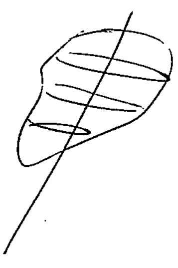
$$\vec{M} = \Sigma_i \, \vec{r}_i \times (\vec{\alpha}_i \times \vec{r}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{v}_i)\, m_i$$

$\alpha = \alpha_i$ for alle i.

$$= \Sigma_i \, r_i^2 m_i \cdot \alpha$$

$$= I \cdot \alpha$$

Generelt:

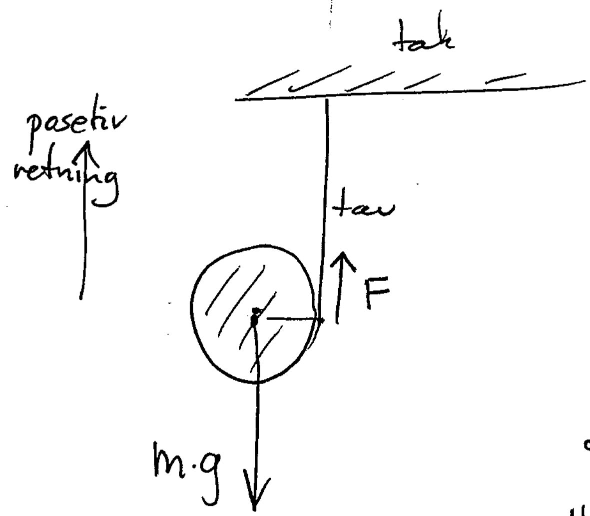


Deler opp i skiver.
Hver skive er et plant legeme.

treghetsmomentet er summen av treghetsmomentene til skivene.

<u>Eksempel</u>

Massiv sylinder med masse M og radius R



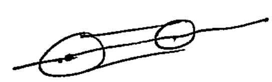
Tauet er vikklet rundt sylinderen.
Vi fester tauet i taket og slipper sylinderen.
Hvor raskt akselrerer sylinderen nedover.

Kraftmomentet på sylinderen $M = F \cdot R$
Vinkelakselerasjonen til sylinderen α tilfredsstiller:

$$I \cdot \alpha = M = F \cdot R$$

$$\alpha = |\vec{\alpha}| = \frac{F \cdot R}{I} \quad \text{positiv}$$

treghetsmomentet for en sylinder med masse m og radius R er $\frac{m}{2} R^2$



Total kraft på sylinderen er:

$$F - mg \qquad a < 0$$

Newtons 2. lov $\qquad F - mg = m \cdot a$

$|\vec{\alpha} R| = |\vec{a}|$

$$\alpha \cdot R = -a \qquad \text{siden } a < 0 \text{ og } \alpha \cdot R > 0 \qquad |\alpha R| = |a|$$

$$F = \frac{\alpha \cdot I}{R} = \left(\frac{-a}{R}\right) \cdot \frac{I}{R} = -\frac{aI}{R^2}$$

Vi får at:

$$F = mg + ma$$

$$-\frac{aI}{R^2} = m(g + a)$$

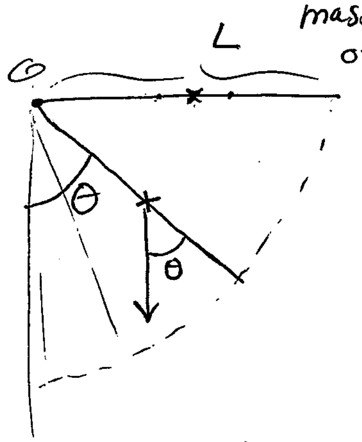
$$-\frac{aI}{R^2} - a \cdot m = m \cdot g, \quad -a\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = m \cdot g$$

Setter inn $I = \frac{m \cdot R^2}{2}$:

$$a = \frac{\cancel{m} \cdot g}{-\left(\cancel{m} + \frac{\cancel{m} \cdot \cancel{R^2}/2}{\cancel{R^2}}\right)} = \frac{-g}{1 + 1/2} = \frac{-g}{3/2}$$

$$a = \frac{-g \cdot 2}{3} = \underline{\underline{\frac{-2g}{3}}}$$

6.5 kontrolloppg 2.



masse m jevnt fordelt over stokken.

$$I = \frac{m \cdot L^2}{3}.$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt}$$

Hva er vinkelakselerasjonen for $\theta = 90°, 30°, 0°$

Bruker kraftmoment.

$$M = I \cdot \alpha$$

$$= m \cdot g \cdot \frac{L}{2} \sin\theta \quad \text{(negativ z-retning)}$$

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{\cancel{m} \cdot g \cdot L \sin\theta/2}{\cancel{m} \cdot L^2/3} \quad \text{— " —}$$

$$\underline{\alpha = \frac{3g \sin\theta}{2L}} \quad \text{(i negativ retning)}$$

1) $\theta = 90$ $\alpha = \frac{3g}{2L}$

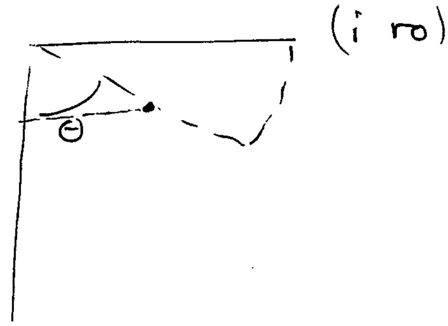
2) $\theta = 30°$ $\alpha = \frac{3g}{4L}$ $(\sin 30° = 1/2)$

3) $\theta = 0°$ $\alpha = 0.$

(vinkelakselerasjonen er i negativ retning: med urviseren)

Alternativ løsning av oppg 2 (6.5)

Bevaring av energi



Potensiell energi endring

$$-\frac{L}{2}\cos\theta \cdot m \cdot g$$

Endring av kinetisk energi

$$\frac{I}{2}\omega^2$$

$$\Delta E = 0 = -\frac{L}{2}\cos\theta \cdot m \cdot g + \frac{I}{2}\omega^2$$

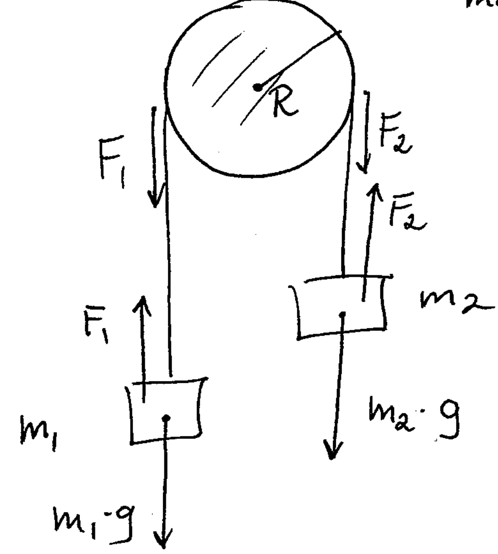
$$\frac{L}{2}\cos\theta \cdot m \cdot g = \frac{I}{2}\omega^2$$

Deriverer med hensyn på tiden:

$$\frac{L \cdot m \cdot g}{2}(-\sin\theta) \cdot \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} = \frac{I}{\cancel{2}} \cancel{2}\omega \cdot \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\alpha}$$

kanselerer

$$-\frac{Lmg}{2}\sin\theta = I\alpha$$



$m_2 > m_1$

Dreiemoment til sylinderen

$$M = F_1 \cdot R - F_2 \cdot R$$
$$= I \cdot \alpha = I \frac{a}{R}$$

Boks 2 $\quad m_2 \cdot a = -m_2 \cdot g + F_2$

Boks 1 $\quad m_1(-a) = -m_1 \cdot g + F_1$

$$F_2 = m_2(a+g) \quad , \quad F_1 = m_1(g-a)$$

$$R(F_1 - F_2) = R\left(m_1 g - m_1 a - m_2 a - m_2 g\right)$$
$$= I \cdot \frac{a}{R} \qquad \left(I = \frac{m_3 \cdot R^2}{2}\right)$$

$$R(m_1 g - m_2 g) = I \cdot \frac{a}{R} + R m_1 a + R m_2 a$$
$$R(m_1 - m_2) g = a\left(\frac{I}{R} + R \cdot m_1 + R \cdot m_2\right)$$
$$a = \frac{R(m_1 - m_2) g}{\left(\frac{m_3 R}{2} + R m_1 + R m_2\right)}$$
$$a = \frac{(m_1 - m_2) g}{\left(\frac{m_3}{2} + m_1 + m_2\right)}$$