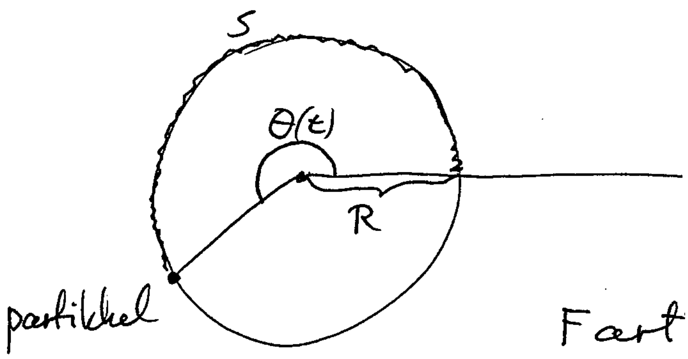
25feb09

Kapittel 5 Kinematikk for rotasjonsbevegelse



Radius R (konstant)

Buelengde $s = R \cdot \theta$

(definisjonen av radianer)

Fart $v = \frac{ds}{dt}$ (tangentiell retning)

Vinkelfart $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ("omega")

$$\underline{v = R \cdot \omega}$$

enhetene til vinkelfarten ω er $\frac{1}{\text{sekund}}$.

Vinkelakselerasjon $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$.

(enhet s^{-2})

Tangential akselerasjon $a_T = \frac{dv}{dt} = R \cdot \alpha$

Sentripetal akselerasjon $a_N = \frac{v^2}{R} = R \cdot \omega^2$

(normal akselerasjon)

For studie av rotasjoner i rommet er det nyttig å angi rotasjonsaksen.

ω vektorstørrelse parallell til rotasjonsaksen med retning bestemt av høyrehansregelen.

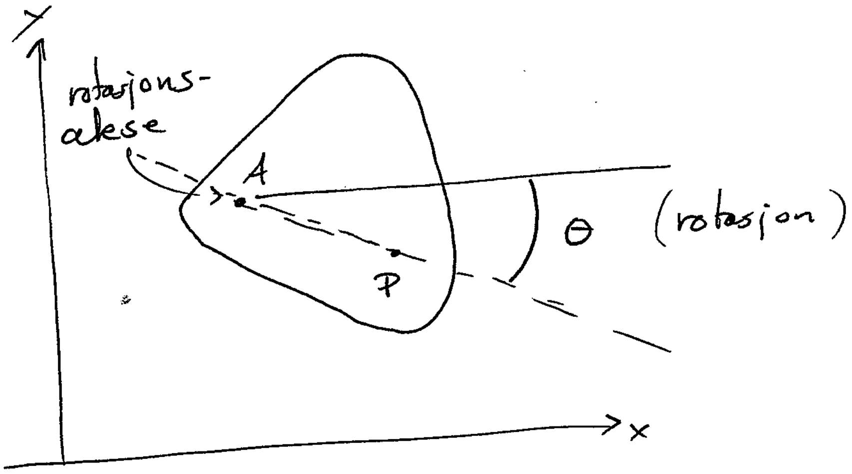
(tommelen gir retningen når fingrene på høyre hand følger rotasjonen.)

Tilsvarende for vinkelakselerasjonen

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$ (så $\vec{\omega}$ og $\vec{\alpha}$ er parallelle.)

Retningen til $\vec{\omega}$ vil typisk endre seg med tiden.

Rotasjon av (stive) legemer.



$\left(\begin{array}{l} |\theta| \text{ vinkelen mellom} \\ \vec{AP} \text{ og } \vec{i} = [1,0]. \end{array} \right)$

θ avhenger av referanse punktet P.

(Et annet referanse punkt gir en konstant forskyvning av θ.)

$\Delta\theta = \theta(t_2) - \theta(t_1)$ er uavhengig av valget av referansepunkt P.

Vinkelfarten $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t}$

er uavhengig av referansepunkt.

<u>Eks</u> Anta $\omega = \dfrac{1}{1+t}$ for $t \geq 0$

Vinkelen er θ_0 ved $t = 0$ (Valgt et referansepunkt)

Finn $\theta(t)$.

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{1}{1+t}$$

$$d\theta = \omega \cdot dt = \frac{1}{1+t}\, dt$$

$$\theta(t) - \theta_0 = \int_0^t \frac{1}{1+t}\, dt$$

$$= \ln(1+t)\Big|_0^t = \ln(1+t) - 0$$

$$\underline{\theta(t) = \theta_0 + \ln(1+t)}$$

Eksamensoppg 2 (2003)

Propellen på et fly har diameter 2.2m.

a) Hvor stor er den maksimale omdreiningsfarten (vinkelfart) hvis propellens ytterste ~~kant~~ deler ikke kan ha fart over 80% av lydfarten (340m/s). Angi i radianer/sekund og omdreining/minutt.

b) Hvor stor er akselerasjonen til et punkt ytterst på propellen ved denne toppfarten?

---

a) $\omega = \dfrac{V}{R}$, $R = \dfrac{2.2\,m}{2} = 1.1\,m$

$V = 0.80 \cdot 340\,m/s = 272\,m/s$

$$\omega = \frac{272\,m/s}{1.1\,m} = \underline{247\ rad/s}$$

$$\omega = 247\,\frac{rad}{s} \cdot \left(\frac{60\,s}{min}\right) \cdot \left(\frac{1\,omdr}{2\pi\,rad}\right)$$

$$= 247 \cdot \frac{60}{2\pi}\ \frac{omdr}{min} = \underline{\underline{2360\ \frac{omdr}{min}}}$$

b) Akselerasjonen er sentripetalakselerasjonen (ω konstant).

$$a_N = \frac{V^2}{R}\ \left(= \omega^2 \cdot R\right) = \frac{(272\,m/s)^2}{1.1\,m} = \underline{\underline{67 \cdot 10^3\ m/s^2}}$$

Eks Anta $\omega = 1 - e^{-\theta}$

Hva er vinkelakselerasjonen?

Vinkelakselerasjonen $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\,\omega(\theta(t))}{dt}$

Kjerneregelen gir:

$$\alpha = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \underline{\frac{d\omega}{d\theta} \cdot \omega}$$

$$= - \underbrace{\frac{de^{-\theta}}{d\theta}}_{-e^{-\theta}} \cdot (1 - e^{-\theta}) = e^{-\theta}(1 - e^{-\theta})$$

$$\alpha(\theta) = \underline{e^{-\theta} - e^{-2\theta}}$$

Periode : tiden det tar å gjøre en rotasjon (periodisk bevegelse)

Frekvens : antall rotasjoner per tidsenhet.

$\underline{\text{Perioden} \cdot \text{Frekvensen} = 1}$

Anta vinkelfarten ω er konstant

Tiden det tar å gjøre en rotasjon.

$2\pi = \omega \cdot T_p$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\omega \neq 0$

Perioden er $\underline{T_p = \frac{2\pi}{\omega}}$

Frekvensen er $\underline{\frac{\omega}{2\pi}}$

[Hvis ω ikke er konstant : momentan periode og frekvens.]

Les 5-4 og 5-6 selv.

Rotasjon med varierende vinkelakselerasjon.

Anta $\omega_0 = 0$ $\qquad \alpha = A \cdot t^2$ $\qquad$ A konstant.

a) Finn vinkelfarten ω.

b) Hva må A være for at $\omega = 4\,s^{-1}$ etter 2 omløp?

---

a) $$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = A \cdot t^2$$

$$d\omega = At^2 dt\,, \qquad \int_{\omega_0}^{\omega(t)} 1 \cdot d\omega = \int_0^t At^2 dt$$

$$\omega - \omega_0 = \int_0^t A \cdot t^2 dt$$

$$\omega = A \int_0^t t^2 dt = A\, t^3/3 \Big|_0^t = A \frac{t^3}{3}.$$

Vinkelfarten er $\underline{\omega = \frac{A}{3} \cdot t^3}$.

b) $$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{A}{3} \cdot t^3$$

integrerer:

$$\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \frac{A}{3} t^3 dt = \frac{A}{3} \int_0^t t^3 dt$$

$$\theta(t) - \theta(0) = \frac{A}{3} \frac{t^4}{4} \Big|_0^t = \frac{A}{12} \cdot t^4.$$

Tidspunktet vi har gjort to omdreininger T.

$$2(2\pi) = 4\pi = \frac{A}{12} \cdot T^4$$

$$T^4 = \frac{48\pi}{A}. \qquad T = \sqrt[4]{\frac{2^4 \cdot 3 \cdot \pi}{A}} = 2\sqrt[4]{\frac{3\pi}{A}}.$$

Vinkelfarten etter to omløp er

$$\omega = \frac{A}{3} T^3 \qquad \text{Den skal være } 4\ \text{rad/s}.$$

$$\omega = \frac{A}{3} \cdot 2^3 \left(\frac{3\pi}{A}\right)^{3/4}$$

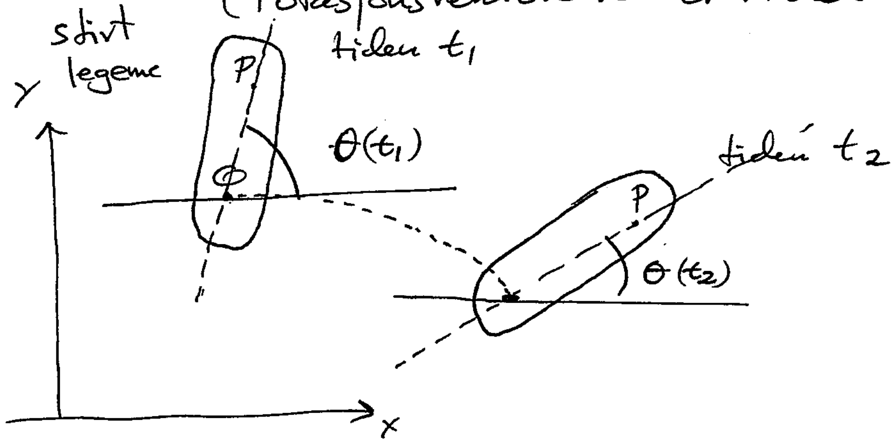
$$\omega = A^{1-3/4}\ 3^{3/4-1} \cdot \pi^{3/4} \cdot 2^3 = 4 = 2^2$$

$$A^{1/4} \cdot 3^{-1/4} \cdot \pi^{3/4} \cdot 2 = 1 \qquad \text{opphøyer i 4de.}$$

$$A \cdot 3^{-1} \cdot \pi^3 \cdot 2^4 = 1 \quad \text{så} \quad \underline{A = \frac{3}{16 \cdot \pi^3}}$$

5-7 Plan bevegelse

Avgrenser oss til bevegelser i planet
(rotasjonsvektorene er vinkelrett på planet.)



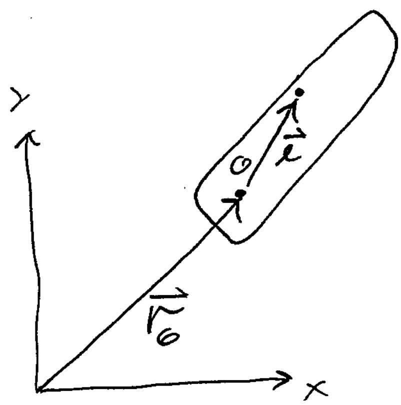
Posisjonsvektor
$\vec{O}(t)$
rotasjonsvinkel $\theta(t)$.

Vi kan beskrive bevegelsen til et stivt legeme som en translasjons bevegelse av et utvalgt punkt, O) på legemet og som en rotasjon rundt dette punktet.

Ofte så bruker vi massesenteret som utvalgt punkt O.

Vinkelfarten $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ avhenger ikke av punktene O og P.

Posisjonsvektor til et vilkårlig punkt i legemet.



konstant $\ell = |\vec{\ell}|$

$$\vec{\ell} = \ell\,[\cos\theta, \sin\theta].$$

$$\vec{r}_O = [X_O, Y_O]$$

$$x = X_O + \ell\cos\theta$$

$$y = Y_O + \ell\sin\theta.$$

Fart $\vec{V} = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right] = [V_{Ox} - \ell\cdot\omega\sin\theta,\; V_{Oy} + \ell\omega\cos\theta].$

Gjør eksamensoppg 3 fra 6 juni 2005.