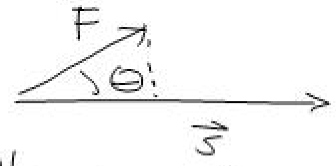
Mandag 9 februar 2009

Arbeid og Energi

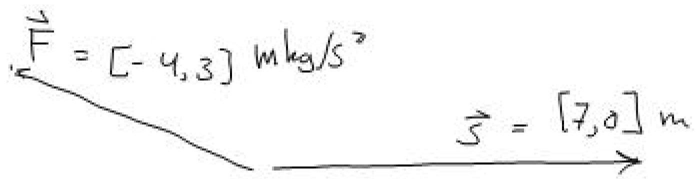
Arbeidet utført av en konstant kraft $\vec{F}$ ved en forflytning $\vec{s}$ er

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = |F| \cdot |\vec{s}| \cos \theta$$



Arbeid = forflytting (langs en linje) · kraftkomponenten parallell til forflyttingen.

Enheten til arbeid er Joule $= N \cdot m = kgm^2/s^2$.



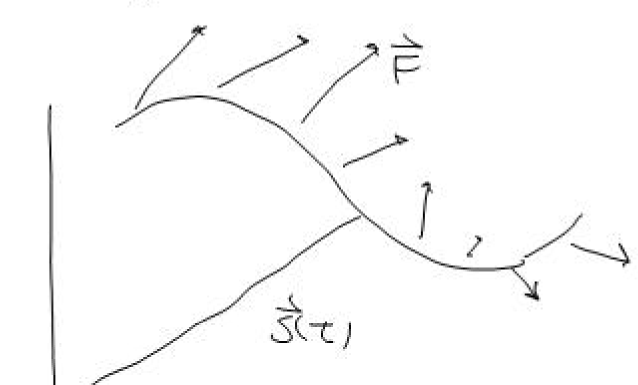
Arbeidet er $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = [-4,3] \cdot [7,0]\ kg\,m^2/s^2$

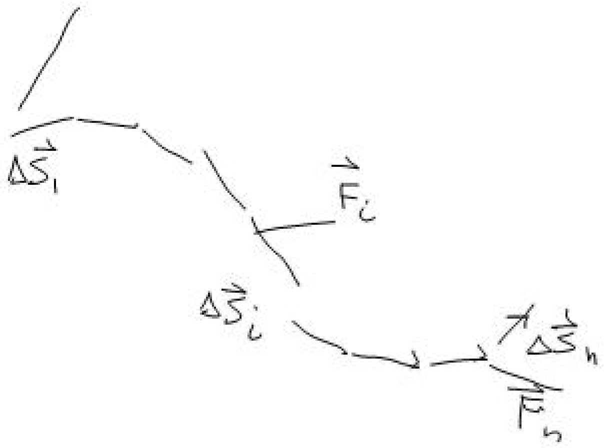
$$= -28\ kg\,m^2/s^2$$

(Vi gikk gjennom oppg 4,1 side 228)

Vi skal nå definere arbeid når kraften ikke er konstant for bevegelser langs en vei.

Vi deler opp veien og tilnærmer bitene med rette linjestykker.





Arbeidet $\quad W = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ |\Delta\vec{s}_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i$

Grensen kalles et kurve (linje) integral (hvis grensen eksisterer) og skrives

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

hvor C er kurven parametrisert av

$$\vec{s}(t) \qquad t_0 \le t \le t_1 .$$

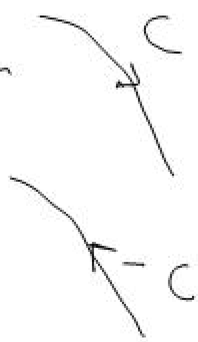
Siden $\quad \Delta s_i = \frac{\Delta s_i}{\Delta t} \cdot \Delta t \quad$ så

kan kurveintegralet regnes ut som

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} \right) dt$$

$-C$ er kurven hvor vi går gjennom den i motsatt vei. Den er parametrisert av

$$\vec{r}(t_1 - t_0 - t) \qquad t_0 \le t \le t_1$$



$$\int_C \vec{F}\, d\vec{s} = -\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Potensiell energi

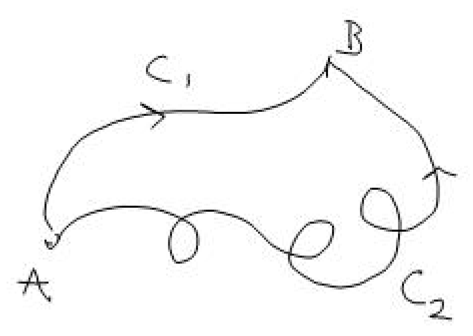
Vi sier at en kraft $\vec{F}$ (kraftfelt) er **konservativ** hvis arbeidet utført av $\vec{F}$

(1) ved forflytning langs en lukket kurve (starter og stopper i samme punkt) er altid 0.

Dette er ekvivalent til at

(2) $$\int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{s}$$ for

alle veier C_1 og C_2 med samme start og stoppunkt.



(2) ⇒ (1) Vi velger kurven som ligger i ro i A som C_1 og kurven C som C_2

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0 \quad , \text{ så } \int_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$$

motsatt

(1) ⇒ (2) Vi lager en lukket kurve av C_1 og C_2:

$C_1 - C_2$ går først langs C_1 og deretter langs C_2 i motsatt retning.

$C_1 - C_2$ er en lukket kurve så (1) gir

$$\int_{C_1 - C_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$$
$$= \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{-C_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} - \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

Anta at $\vec{F}$ er parallell til x-aksen og bare avhengig av posisjonen X

Da er $\vec{F}$ en konservativ kraft.

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{X}}{dt}\, dt = \int_{X(t_0)}^{X(t_1)} F(x)\, dx$$

(utelater vektornotasjon siden 1-dimensjonalt)

Dette avhenger bare av $X(t_0)$ og $X(t_1)$ og $\vec{F}(\vec{X})$

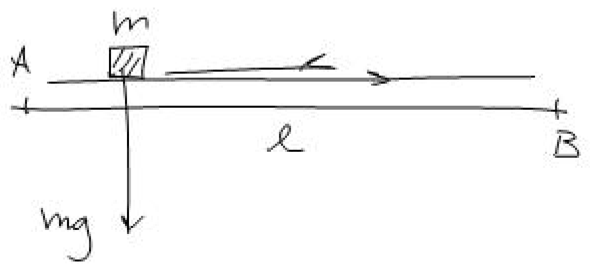
I 1-dimensjon er alle vektorfelt som bare avhenger av posisjonen konservative

---

Eksempel på en ikke konservativ kraft i 1 dimensjon.

Friksjon

friksjonskoeffisient μ



Vi går rett frem fra A til B og tilbake. (lukket kurve)

Friksjonskraften har størrelse μmg og retning motsatt av bevegelsesretningen.

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot ds = (-\mu mg) \cdot \ell + (\mu mg)(-\ell)$$

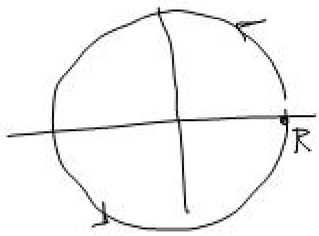
$$= \underline{-2\mu mg\ell} \neq 0 \quad \text{ikke konservativ.}$$

Dette motsier ikke resultatet på forrige side. Friksjonskraften avhenger ikke bare av posisjonen x men også av (retningen) til farten $\frac{dx}{dt}$

Vi skal nå se et eksempel på et kraftfelt i planet som bare avhenger av posisjonen men som ikke er konservativt.

La $\vec{F}(x,y) = [-y, x]$.

La C_1 være den lukka kurven



$\vec{S}(t) = [x,y] = [R\cos t, R\sin t]$

$0 \le t \le 2\pi$

Vi går en gang rundt i sirkulær bane med radius R, senter (0,0) og "mot klokken".

La C_2 være tilsvarende bane hvor vi går 3 ganger rundt ($0 \le t \le 6\pi$).

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \left[\frac{d}{dt} R\cos t, \frac{d}{dt} R\sin t\right] = [-R\sin t, R\cos t]$$

$$= [-y, x].$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}\, dt = \int_0^{2\pi} \overbrace{y^2 + x^2}^{R^2}\, dt$$

$$= 2\pi \cdot R^2$$

Tilsvarende: $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 6\pi \cdot R^2$

Merk at grafen til C_1 og C_2 er like men kurveintegralene er ulike.

Anta nå at $\vec{F}$ er et konservativt kraftfelt. Vi definerer

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Hvor integralet er langs en eller annen kurve fra $\vec{r}_0$ til $\vec{r}_1$. Dette er velldefinert siden $\vec{F}$ er konservativ.

$U(\vec{r}_0) = 0$, og en endring i startpunktet $\vec{r}_0$ endrer $U(\vec{r})$ ved å legge til en konstant.

$$\Delta U(\vec{r}) = - F_x(\vec{r})\,\Delta x - F_y(\vec{r})\,\Delta y - F_z(\vec{r})\,\Delta z$$

Hold y og z uendret $\Delta y = \Delta z = 0$ og la $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U(\vec{r})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$= -F_x$$

Grensen skrives $\frac{\partial U}{\partial x}(\vec{r})$ og kalles partiell deriverte av U med hensyn til x.

(symbolet ∂ er en delta, det er også δ og Δ)

Tilsvarende i y og z retning.

Dette gir $\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x$ $\frac{\partial U}{\partial y} = -F_y$, $\frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$.

Dette gir strenge føringer på $\vec{F}$ for at det skal være konservativt.

La $\vec{\nabla} = [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}]$

Dette kalles Nabla eller Del-operatoren.

Vi kan nå skrive relasjonen mellom U og $\vec{F}$ som: $\underline{\vec{\nabla} U = -\vec{F}}$

U kalles potensialet til $\vec{F}$.

Bare konservative krefter har en potensialfunksjon.

($\vec{\nabla} U$ kalles også gradienten til U.)

Fortegnet er innført slik at potensialet er størst når kraften har utført minst arbeid (den har da størst potensiale) til å utføre arbeid.

Eksempel: Gravitasjon $\vec{F} = -mg\vec{k}$

$= [0, 0, -mg]$.

Dette er konservativt og har potensialfunksjon $U = mg(z - z_0)$

(hvor vi har lagt til en konstant slik at potensialet er 0 ved høyde z_0).

Vi ser at potensialet øker når høyden z øker.

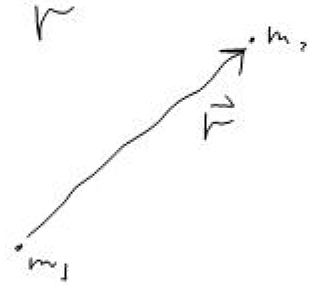
Arbeidet utført av gravitasjonen ved å gå fra høyde z_0 til høyde z er derimot $-mg(z - z_0)$.

Mer generelt så har vi at en konstant kraft $\vec{F} = [F_x, F_y, F_z]$ er konservativ og en potensial funksjon er gitt ved

$$U(x,y,z) = -(F_x \cdot x + F_y \cdot y + F_z \cdot z).$$

Hvorfor?

Gravitasjonskraften mellom to punktmasser med ladning m_1 og m_2 er $-G \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$



hvor $G = 6.672\ldots \cdot 10^{-11}\ Nm^2/(kg)^2$

Coulumbs lov for kraften mellom to ladde partikkler med ladning q_1 og q_2 sier at kraften er

$$k \frac{q_1 \cdot q_2 \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

hvor $k = 8.987\ldots \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$

1 C : Coulomb enhet for ladning)

Disse kreftene er konservative:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right) = \frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

syn dette!