Løsningsforslag Obligatorisk oppgave 1 i FO340E

10. februar 2009

Det er fint om dere har laget figurer hvor kreftene er tegnet inn, selv om det er utelatt i dette notatet av praktiske årsaker.

En oppgave kan løses på mange måter. Her er mitt forslag til løsning av oppgavene.

Oppgave 1

En partikkel er ved tiden $t_0 = 0$ sekund i punktet $[1, -2, 3]$ og beveger seg med forflytningsvektor

$$[1 + t, -2 + t^2, 3 + t^3]$$

for $t \geq 0$.

a) Hva er fartsvektoren ved tiden t?

b) Hva er akselerasjonsvektoren ved tiden t?

c) Dekomponer akselerasjonsvektoren i en tangential og en normal komponent.

Løsningsforslag til Oppgave 1

Forflyttningsvektoren er gitt ved $\mathbf{r}(t) = [1 + t, -2 + t^2, 3 + t^3]$.

a) Fartvektoren $\mathbf{v}(t)$ er tidsderiverte av $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = [1, 2t, 3t^2].$$

b) Akselerasjonsvektoren $\mathbf{a}(t)$ er tidsderiverte av fartsvektoren $\mathbf{v}(t)$:

$$\mathbf{a}(t) = [0, 2, 6t].$$

c) Enhetsvektoren i tangential retning er

$$\mathbf{u}_T = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}[1, 2t, 3t^2].$$

Tangential komponent av akselerasjonen er komponenten til $\mathbf{a}$ i retning $\mathbf{u}_T$. Dette er

$$\mathbf{a}_T = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_T)\mathbf{u}_T = \frac{4t + 18t^3}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}\mathbf{u}_T = \frac{4t + 18t^3}{1 + 4t^2 + 9t^4}[1, 2t, 3t^2].$$

Normalkomponenten $\mathbf{a}_N$ til akselerasjonen er $\mathbf{a} - \mathbf{a}_T$. Dette er

$$\mathbf{a}_N = [0, 2, 6t] - \frac{4t + 18t^3}{1 + 4t^2 + 9t^4}[1, 2t, 3t^2] =$$

$$\frac{1}{1 + 4t^2 + 9t^4}[-4t - 18t^3, 2 - 18t^4, 6t + 12t^3].$$

Dette kan en selvsagt komme frem til på andre måter også.

Oppgave 2

En boks av tre blir skubbet bortover en lang horisontal rett strekning i ett minutt. Boksen ligger i ro i forhold til underlaget før vi begynner å skubbe. La tiden være 0 sekund når vi begynner å skubbe. Kraften som benyttes har størrelse

$$F(t) = k(60\text{sekunder} - t)$$

det første minuttet, og siden er den 0. Konstanten k er 3 kilogram meter/sekund^3. Massen til boksen er $m = 50$ kilo. Den kinetiske (glide) friksjonskoeffisienten er $\mu = 0.20$. (Vi går ut fra at den statiske frisksjonskoeffisienten er mindre enn 0.30.)

a) Beskriv banefarten som en funksjon av tiden t.

b) Hva er den største banefarten til boksen?

c) Beskriv forflyttingen til boksen fra tiden $t_0 = 0$ til tiden $t \geq 0$.

d) Hvor langt beveger boksen seg før den stopper?

Løsningsforslag til Oppgave 2

For å gjøre notasjonen enklere lar vi $T = 60$ sekunder. Kraften i startøyeblikket er 180 Newton. Dette er større enn den statiske friksjonskraften som ikke er større enn $\mu_s mg < 150$ Newton. Så boksen kommer i bevegelse.

a) Vi velger en koordinatakse som er 0 i massesenteret til boksen ved tiden $t_0 = 0$ sekunder med positiv retning i retning av kraften. Vi har da at total kraft på boksen i positiv retning er

$$\begin{cases} k(T - t) - \mu mg & T \geq t \geq 0 \\ -\mu mg & t \geq T \end{cases}$$

Merk at dette bare er gyldig så lenge boksen er i bevegelse. Friksjonskraften bortfaller hvis boksen stopper. Fra Newtons andre lov er akselerasjonen kraften delt på massen. Vi får da at så lenge farten er positiv så er farten

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt = \frac{1}{m}\begin{cases} (Tk-\mu mg)t - k\frac{t^2}{2} & T \geq t \geq 0 \\ (Tk-\mu mg)T - k\frac{T^2}{2} - \mu mg(t-T) & t \geq T \end{cases}$$

Når farten blir 0 vil boksen stoppe opp og farten forblir deretter 0. Faktisk vil boksen stoppe opp mens vi enda anvender en kraft på den. La T_s være tidspunktet boksen stopper opp. I intervallet mellom 0 og $T = 60$ sekunder blir farten 0 når tiden er

$$T_s = \frac{2(Tk-\mu mg)}{k} = \frac{2(180 - 10\cdot 9.8)}{3}\text{ sekund} = 54.7\text{ sekund.}$$

Vi kan nå svare på del a). Farten er gitt ved

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt = \frac{1}{m}\begin{cases} (Tk-\mu mg)t - k\frac{t^2}{2} & T_s \geq t \geq 0 \\ 0 & t \geq T_s \end{cases}$$

b) Farten vokser så lenge akselerasjonen er positiv og begynner å avta når akselerasjonen snur fortegn og blir negativ. Tiden når farten er størst er derfor tiden T_v hvor $a(T_v) = 0$, eller der hvor den totale kraften på boksen er 0. Vi løser likningen $k(T - T_v) - \mu mg = 0$ og finner

$$T_v = T - \frac{\mu mg}{k} = 27.3\text{ sekund.}$$

(Det burde ikke væere en overaskelse at $T_v = \frac{1}{2}T_s$ siden fartsfunksjonen er en parabel.) Farten er størst når $t = T_v$ og farten er da

$$(Tk/m - \mu g)T_v - k\frac{T_v^2}{2m} = 22.4\text{ meter/sekund.}$$

c) Forflytningen til boksen er integralet av farten fra tiden $t_0 = 0$ til tiden t. Forflyttningen fra 0 er

$$x(t) = \int_0^t v(t)\,dt = \frac{1}{m}\begin{cases} (Tk-\mu mg)\frac{t^2}{2} - k\frac{t^3}{6} & T_s \geq t \geq 0 \\ (Tk-\mu mg)\frac{T_s^2}{2} - k\frac{T_s^3}{6} & t \geq T_s \end{cases}$$

d) Boksen beveger seg en distanse

$$\frac{1}{m}\left((Tk-\mu mg)\frac{T_s^2}{2} - k\frac{T_s^3}{6}\right) = 817\text{ meter}$$

før den stopper.

Oppgave 3

En boks A med en flat overflate ligger på en friksjonsfritt bord. Vi legger en liten boks B (vi kan se bort fra utstrekningen til denne) oppå boks A. Vi skal nå dra i boks A. Den statiske friksjonskoeffisienten mellom boksene er μ_s og den glide (kinetiske) friksjonskoeffisienten er μ_g. Massen til boks A er M og massen til boks B er m.

a) Bestem hvor stor kraft vi må minst dra med for at boks B ikke skal følge med boks A (med samme fart).

b) La avstanden fra boks B til kanten av boks A i motsatt retning av kraften vere x. Ved anvendelse av en kraft F (større enn kraften i del a)) på boks A hvor langt har boks B beveget seg i det den faller av boks A? Er avhengigheten av x, m, M, F i uttrykket du får rimelig?

Løsningsforslag til Oppgave 3

Det virker en friksjonskraft R på boks B i retning av kraften. Ved Newtons tredje lov virker det en motkraft R på boks A i motsatt retning. Totalkraft på boks B er derfor R og totalkraft på boks A er $F - R$. Ved Newtons andre lov er akselerasjonen til boks B gitt ved

$$a_B = \frac{R}{m}$$

og akselerasjonen til boks A er gitt ved

$$a_A = \frac{F - R}{M}.$$

Den statiske friksjonskraften vil ikke overstige $\mu_s mg$. Så boksene beveger seg med samme akselerasjon så lenge friksjonskraften er mindre enn $\mu_s mg$. Det vil si så lenge akselerasjonen $a_A = a_B < \mu_s g$. Det er tilfelle så lenge

$$F = (m + M)a_A < (m + M)\mu_s g.$$

Så en må dra med en kraft $F > \mu_s(m+M)g$ for at boks A skal akselerere raskere enn boks B. Når vi drar med en slik kraft vil det komme istand bevegelse mellom boks A og boks B. Når boksene kommer i bevegelse i forhold til hver andre blir friskjonskraften mindre, den blir $R_g = \mu_g mg$. Akselerasjonen til boks B er

$$a_B = \frac{R_g}{m} = \mu_g g,$$

og akselerasjonen til boks A er

$$a_A = \frac{F - R_g}{M} = \frac{F - \mu_g mg}{M}.$$

Vi antar fra nå av at $F > \mu_s(m+M)g$.

Fra vi starter å dra boksene i tiden $t = 0$ til tiden t er forflytningen til boks B gitt ved

$$s_B = \frac{1}{2}a_B t^2$$

og forflytningen til boks A er gitt ved

$$s_A = \frac{1}{2}a_A t^2.$$

Boks B faller av boks A når differansen $s_A - s_B = x$. (Vi går utfra at avstanden er fra massesenteret til boks B ut til kanten av boks A.) Dette skjer når $\frac{1}{2}(a_A - a_B)t^2 = x$. Så kvadratet av tiden er da

$$t^2 = \frac{2x}{a_A - a_B}.$$

Boks B har da forflyttet seg en avstand

$$\frac{1}{2}a_B t^2 = \frac{x a_B}{a_A - a_B} = \frac{xM}{(F/\mu_g g) - (m+M)}.$$

Dette virker rimelig. Avstanden boks B beveger seg er proporsjonal til x. Ved å la kraften F bli veldig stor så kan vi gjøre avstanden boks B beveger seg vilkårlig liten. Hvis kraften vi bruker er bare litt større en kraften som skal til for å få boks A til å dra fra boks B, $F - \mu_g(m+M)g$ liten, så blir avstanden boks B beveger seg stor.

Anta at $\mu_s > \mu_g$. Vi finner den lengste avstanden vi kan få boks B til å bevege seg (uten at den følger boks A) ved bruk av konstant kraft. Den minste kraften vi kan bruker for å få istand bevegelse mellom boksene er kraften $F = \mu_s(m+M)g$. I dette tilfelle blir lengden boks B beveger seg

$$\frac{xM}{(\mu_s/\mu_g - 1)(m+M)}.$$