# VEKTORPRODUKTET

HALVARD FAUSK

Notatet inneholder en gjennomgang av vektorproduktet. Det er lagt vekt på å syne at vektorproduktet er bilineært uten bruk av koordinatpresentasjon av vektorproduktet.

Vi definerer et antisymmetrisk og bilineært produkt på vektorer i rommet. Produktet kalles for `vektorproduktet` eller `kryssproduktet`. Det første navnet kommer av at produktet av to vektorer er en ny vektor, og det andre navnet kommer av at symbolet som brukes for produktet er en kryss $\times$.

To ikke-parallelle vektorer i rommet utspenner et plan. Underrommet av vektorer som står vinkelrett på dette planet er 1-dimensjonalt. Derfor finnes det en vektor $\mathbf{v}$ slik at enhver vektor som står normalt på planet er på formen $t\mathbf{v}$ for en unik skalar $t$.

`Definisjon av vektorproduktet:` La $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ vere to vektorer i rommet. Vektorproduktet, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, av $\mathbf{a}$ med $\mathbf{b}$ er vektoren definert som følger. Hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er parallelle vektorer så er $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ ikke er parallelle vektorer gjelder følgende:

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står normalt på både $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$
(2) absoluttverdien $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ er $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathrm{v})$ hvor v er vinkelen mellom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$.
(3) (Høyrehandsregelen) Vektorene $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er et høyrehandssystem av vektorer. Det vil si at om vi dreier fingrene på høyre hand fra vektoren $\mathbf{a}$ mot vektoren $\mathbf{b}$ (i retningen hvor vinkelen mellom dem er minst) da vil tommelen peke i retningen til $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Vektorproduktet er veldefinert: La $\mathbf{v}$ vere en vektor som har absoluttverdi 1 og er vinkelrett på både $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Fra del 1 følger det at $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er parallell med $\mathbf{v}$. Fra del 2 følger det videre at $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er $t\mathbf{v}$ hvor $t$ er $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathrm{v})$ eller $-|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathrm{v})$. Fortegnet er bestemt av del 3.

Hvis vi snur rekkefølgen til $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ i kryssproduktet så får vi motsattvektoren til $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Derfor er kryssproduktet antikommutativt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Kryssproduktet er kontinuerlig. “Små endringer i $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ gir små endringer i $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.” Merk at hvis vinkelen mellom vektorene nærmer seg 0 grader eller 180 grader så vil absoluttverdien på kryssproduktet også nærme seg 0.

Kryssproduktet er lineært med hensyn til skalar multiplikasjon

$$\mathbf{a} \times (s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \tag{1}$$

Dette følger direkte fra definisjonen av kryssproduktet. Spesielt har vi at $\mathbf{a} \times (-\mathbf{b}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ fra høyrehandsregelen.

*Date*: 7.november 2008.

Det er ikke lett å syne at vektorproduktet er lineært med hensyn til addisjon av vektorer. Vi trenger litt forberedelser.

Trippelproduktet av $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, og $\mathbf{c}$ er definert som $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Trippelproduktet er, opp til fortegn, volumet av det tredimensjonale parallellogrammet utspent av vektorene $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ i rommet. Dette volumet er uendret ved permutasjon av de tre vektorene. Derfor er trippelproduktet, opp til fortegn, ikke avhengig av om vektorene permuteres. Siden vektorproduktet er antisymmetrisk får vi at trippelproduktet også er antisymmetrisk ved ombytte av to vektorer. En syklisk permutason av de tre vektorene består av to ombytter av vektorer. Derfor får vi at

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \tag{2}$$

La $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ være to vektorer. Vektoren $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ er vinkelrett på planet utspent av $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Derfor er $\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ i dette planet og samtidig vinkelrett på $\mathbf{b}$. Lengden til vektoren er

$$|\mathbf{b}||\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{b}|^2|\mathbf{a}|\sin \mathrm{v}$$

hvor v er vinkelen mellom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. En vektor i planet vinkelrett på $\mathbf{b}$ er komponenten

$$\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

til $\mathbf{a}$ vinkelrett på $\mathbf{b}$. Ganger vi denne vektoren med $|\mathbf{b}|^2$ får vi en vektor med riktig lengde. Denne vektoren er $|\mathbf{b}|^2\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}$. Fortegnet til denne vektoren er riktig ved inspeksjon av høyrehandsregelen. Vi har dermed synt at

$$\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = |\mathbf{b}|^2\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}.$$

Vi skal nå syne følgende identitet:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}. \tag{3}$$

Vektoren $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ er vinkelrett på $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$. Den er derfor en lineær kombinasjon, $k\mathbf{b}+l\mathbf{c}$, av $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$. Vi tar prikkproduktet med $\mathbf{b}$ (trippelprodukt)

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b})) =$$

$$\mathbf{a}\cdot(|\mathbf{b}|^2\mathbf{c} - (\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

Dette er lik

$$\mathbf{b}\cdot(k\mathbf{b}+l\mathbf{c}) = k|\mathbf{b}|^2 + l(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).$$

Prikkproduktet med $\mathbf{c}$ gir tilsvarende resultater.

Vi har derfor at $k$ og $l$ må tilfredstille de følgende to likningene

$$k|\mathbf{b}|^2 + l(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

$$k(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) + l|\mathbf{c}|^2 = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})|\mathbf{c}|^2 + (\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$$

Likningene er lineært uavhengige såfremt $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ ikke er parallelle. Løsningen er da $k = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$ og $l = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$. Hvis $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er parallelle er det lett å se at $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ så identitet 3 holder også i dette tilfellet. Dette gir identitet 3.

Vi skal nå syne at

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}. \tag{4}$$

Vi kan anta at ingen av vektorene $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ samt $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ er nullvektorer siden resultatet da er opplagt sant.

Vi observerer først at både $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ og $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ har trivielt prikkprodukt med både $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b} + \mathbf{c}$. Dette er opplagt for $\mathbf{a}$, for $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ følger det av identitet 2 fordi

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ er parallelle følger identitet 4 fordi komponentene til $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ vinkelrett på $\mathbf{a}$ er motsattvektorer. Vi antar derfor at vektorene ikke er parallelle, slik at de utspenner et plan. Siden både $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ og $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ er vinkelrette på planet er de da parallelle. Vi sjekker om lengden på vektorene er like. La v vere vinkelen mellom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b} + \mathbf{c}$. Absoluttverdien til den første vektoren er:

$$|\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})|^2 = |\mathbf{a}|^2 |(\mathbf{b} + \mathbf{c})|^2 (1 - \cos^2 \mathrm{v}) =$$

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})|^2 =$$

$$|\mathbf{a}|^2 (|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) =$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \times \mathbf{c}|^2 + 2|\mathbf{a}|^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}).$$

Absoluttverdien til den andre vektoren er:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}|^2 =$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \times \mathbf{c}|^2 + 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

Vi får at absoluttverdiene er like hvis og bare hvis følgende holder:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}).$$

Dette er en konsekvens av identitetene 2 og 3:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c})) =$$

$$\mathbf{a} \cdot ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}).$$

Vi har dermed vist at $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ og $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ er parallelle og har samme absoluttverdi. At kryssproduktet er lineært med hensyn til skalarmultiplikasjon og at det er kontinuerlig gir at vektorene må vere like ved følgende argument. Å skifte fortegn på en vektor som ikke er nullvektoren er ikke kontinuerlig. Hvis fortegnet var motsatt ville $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\mathbf{c}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - t(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$. Ved å endre gradvis på $\mathbf{c}$ og $t$ slik at høyresiden er ulik nullvektoren og slik at $t$ går mot null får vi at $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Dette er ikke mulig når $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ ikke er parallelle. Derfor er dette fortegnet ikke mulig. Vi har synt likheten 4.

Ved å kombinere likhetene 1 og 4 får vi at

$$\mathbf{a} \times (s\mathbf{b} + t\mathbf{c}) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + t(\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \tag{5}$$

for vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ og skalarer (reelle tall) $s$ og $t$. Antikommutativitet gir tilsvarende lineæritet i første variabel i kryss-produktet. Vi sier at kryssproduktet er bilineært siden er linært med hensyn til både første og andre variabel.

Vektorproduktet er invariant under ortogonale transformasjoner som bevarer orienteringen (rotasjon) men ikke under ortogonale transformasjoner som snur orienteringen (som refleksjon). Ved endring av orientasjonen må høyrehansregelen erstattes med venstrehansregelen. (Speilbilde av en høyre hand er en venstre hand.)

La $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ vere normale basisvektorer i henholdsvis $x$, $y$ og $z$-retning. Fra definisjonen av kryssproduktet følger det at $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ og $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$. Kryssproduktet av en vektor med seg selv er null-vektoren.

Vi bruker at kryssproduktet er lineært til å gi en koordinatbeskrivelse av kryssproduktet. La

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} = [x_1, y_1, z_1]$$

og la

$$\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k} = [x_2, y_2, z_2].$$

Kryssproduktet $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er

$$(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \times (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}).$$

Dette er

$$x_1y_2\mathbf{k} - x_1z_2\mathbf{j} - y_1x_2\mathbf{k} + y_1z_2\mathbf{i} + z_1x_2\mathbf{j} - z_1y_2\mathbf{i}.$$

I koordinatpresentasjon så er dette vektoren

$$[y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2].$$

Dette kan beskrives ved hjelp av determinanter.

Kryssproduktet er ikke assosiativt. For eksempel så er

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i},$$

mens $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{0}$. Kryssproduktet tilfredstiller følgende identitet

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0.$$

Denne identiteten kalles `Jacobi identiteten`. Den er en konsekvens av identitet 3.

*E-mail address*: `fauskh@yahoo.com`