

①

Vektorproduktet (kryss-produktet)

Tar inn to 3-vektorer og gir en 3-vektor

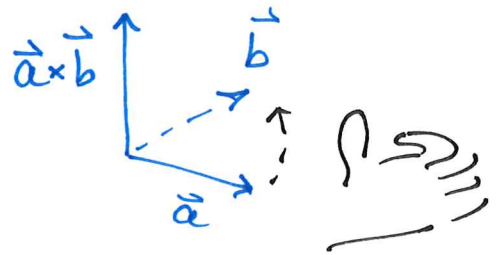
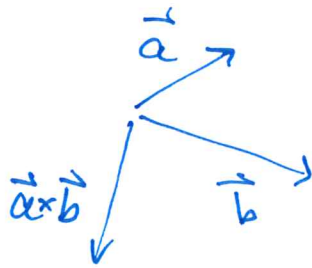
$$\vec{a} \times \vec{b}$$

Definisjon 1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\nu)$

ν vinkelen mellom \vec{a} og \vec{b} .

2) $\vec{a} \times \vec{b}$ er ortogonal (vinkelrett på) til både \vec{a} og \vec{b} (når \vec{a} og \vec{b} ikke er parallelle)

3) \vec{a} , \vec{b} og $\vec{a} \times \vec{b}$ er et høyrehåndssystem



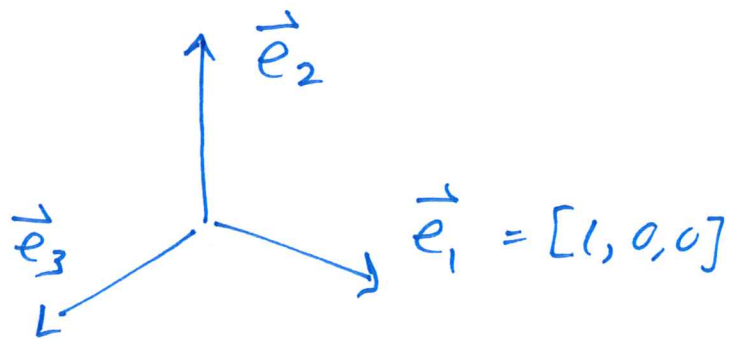
\vec{a} og \vec{b} i planet
 $\vec{a} \times \vec{b}$ peker rett ut av arket.

Vi virer høyrehand fra første til andre vektor. Tommelen vil da peke i retning til den tredje vektoren.

$$\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$$

vektorproduktet er antisymmetrisk

2



$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ er et høyrehandssystem.

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

($|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \sin(90^\circ) = 1$
vektorer vinkelrett på \vec{e}_1 og \vec{e}_2 er
parallell til \vec{e}_3 (z-aksen)

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = +\vec{e}_3$ eller $-\vec{e}_3$. Høyrehandsregelen
gir at $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$$

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_1| = |\vec{e}_1|^2 \sin(0^\circ) = 0$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$$

(3)

$$\vec{e}_1 = \vec{i}$$

$$\vec{e}_2 = \vec{j}$$

$$\vec{e}_3 = \vec{k}$$

alternativ (enklere?) notasjon for enhetsvektorene i x , y og z -retning

$$(\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i}$$

$$\vec{j} \times (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\underbrace{(\vec{j} \times \vec{j})}_{\vec{0}} \times \vec{k} = \vec{0}$$

kryssproduktet er ikke assosiativt!

$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ er meningsløst

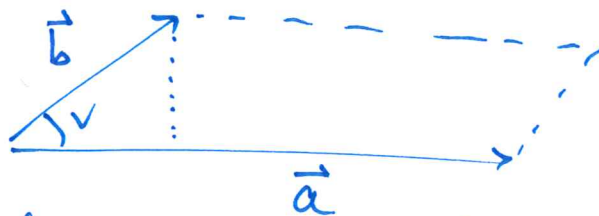
er det $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ eller $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$?

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \text{ og } \vec{b} \text{ er parallelle.}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\nu)$$

er arealet til

parallelogrammet utspent av \vec{a} og \vec{b} .



$\vec{a} \times \vec{b}$ er lineært i både \vec{a} og \vec{b}

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$$

(ikke opplagt)

ser først på kryssproduktet for vektore
i xy -planet.

Giv forbehold
til z -planet.

(4) $[x_1, y_1, 0] \times [x_2, y_2, 0]$

$$(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j})$$

lineært
produkt
giver

$$x_1 x_2 \underbrace{\vec{i} \times \vec{i}}_{\vec{0}} + x_1 y_2 \underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_{\vec{k}} + y_1 x_2 \underbrace{\vec{j} \times \vec{i}}_{-\vec{k}} + y_1 y_2 \underbrace{\vec{j} \times \vec{j}}_{\vec{0}}$$

$$= (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= [0, 0, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}]$$

Tilsvarende får vi generelt

$$[x_1, y_1, z_1] \times [x_2, y_2, z_2] =$$

$$\left[\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right]$$

Detaljere finner
dere i forårsforelesning
25.01.2018

(Vi minner om 2×2 -determinante)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Minus tegnet i y -koordinaten kommer fra

$$x_1 z_2 \underbrace{\vec{i} \times \vec{k}}_{-\vec{j}} + x_2 z_1 \underbrace{\vec{k} \times \vec{i}}_{\vec{j}} = - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j}$$

Eksempel $\vec{a} = [1, 2, 0]$ og $\vec{b} = [3, 5, 7]$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left[\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right]$$

⑤ $= [2 \cdot 7 - 0, -(1 \cdot 7 - 0), 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3]$

$$= \underline{[14, -7, -1]}.$$

Finne $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 14 \cdot 1 - 7 \cdot 2 + 0 = 0$

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= 14 \cdot 3 - 7 \cdot 5 - 1 \cdot 7 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 7 - (5+1) \cdot 7 = 0 \end{aligned}$$

Finne $\vec{a} \cdot \vec{b} = 13$ $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ $|\vec{b}| = \sqrt{83}$

og vinkelen ν mellom \vec{a} og \vec{b} .

$$\cos(\nu) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{13}{\sqrt{5 \cdot 83}}$$

$$\nu \approx \underline{50.34^\circ}$$

Vi regner ut $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\nu)$ og sammenlikner med $|\vec{a} \times \vec{b}|$

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\nu) = \sqrt{5 \cdot 83} \sin(\nu)$$

$$= \underline{15.684}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |[14, -7, -1]| = \sqrt{196 + 49 + 1}$$

$$= \sqrt{246}$$

$$\approx 15.684$$

Vi observerer at

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\nu) \text{ i dette tilfellet.}$$

Determinanter av 3×3 matriser

6

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & \overline{} & \\ | & b_2 & b_3 \\ | & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & -a_2 & \\ b_1 & | & b_3 \\ c_1 & | & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & \overline{} \\ b_1 & b_2 & | \\ c_1 & c_2 & | \end{vmatrix}$$

Eksempel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (1 - 0) - 2(4 - 6) + 1(0 - 3)$$

$$= 1 + 4 - 3 = \underline{\underline{2}}$$

Vektorproduktet uttrykt ved determinanter

$$[a_1, a_2, a_3] \times [b_1, b_2, b_3]$$

$$\textcircled{7} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Oppg. Finn $\vec{a} \times \vec{b}$ når

$$\vec{a} = [1, 2, -3] \quad \text{og} \quad \vec{b} = [0, 5, -1].$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, -3 \\ 5, -1 \end{vmatrix} \vec{i} +$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (-2 - (-15)) \vec{i} - (-1 - 0) \vec{j} + (5 - 0) \vec{k}$$

$$\text{Så} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \underline{\underline{[13, 1, 5]}}$$