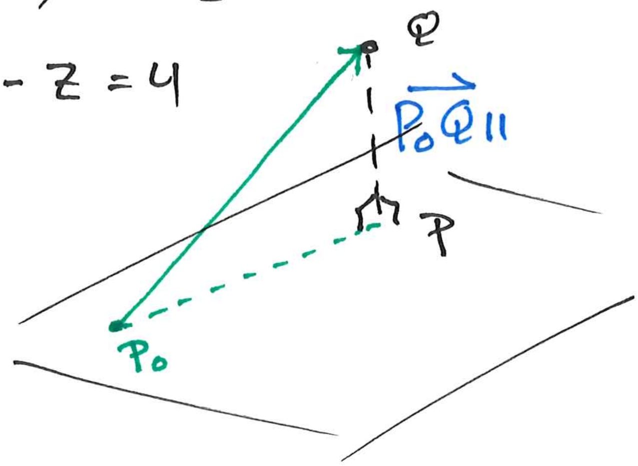
Fausk

1

Gitt et punkt $Q(1,-1,2)$ og et plan $2x+3y-z=4$

Finn punktet P i planet nermest Q og finn avstanden fra Q til planet (den er $|\vec{PQ}|$)



En normalvektor til planet er $\vec{n}=[2,3,-1]$

Vi velger $P_0(2,0,0)$ (Det ligger i planet siden $2(2)+3\cdot 0-0=4$)

$$\vec{P_0Q} = \vec{OQ} - \vec{OP_0} = [1,-1,2]-[2,0,0]$$
$$= [-1,-1,2]$$

Finner komponenten til $\vec{P_0Q}$ langs normalvektoren $\vec{n}$ til planet

$$\frac{\vec{P_0Q}_{\parallel} = \vec{PQ}}{\vec{P_0Q}} = \frac{\vec{P_0Q}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

$$= \frac{[-1,-1,2]\cdot[2,3,-1]}{2^2+3^2+(-1)^2}[2,3,-1]$$

$$= \frac{-7}{14}[2,3,-1] = -\frac{1}{2}[2,3,-1]$$

Avstanden mellom Q og planet er

$$|\vec{PQ}| = \left|\tfrac{1}{2}[2,3,-1]\right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{14} = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{7}{2}}}}$$

2

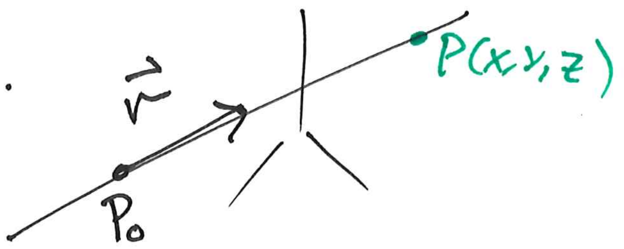
$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} = [1,-1,2] - \underbrace{\left(\tfrac{-1}{2}\right)[2,3,-1]}_{\vec{PQ}}$$

$$= [1,-1,2] + \left[1, \tfrac{3}{2}, \tfrac{-1}{2}\right]$$

$$= \left[2, \tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2}\right]$$

Så koordinaten til P er $\underline{\underline{\left(2, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right)}}$

parametrisering av linjer.



Beskrevet av et punkt på linjen og er retningsvektor parallell til linjen

$P(x,y,z)$ ligger på linjen $\Leftrightarrow$

$$\vec{P_0P} = t\vec{r} \qquad t \text{ reelt tall}$$

$$\vec{OP} - \vec{OP_0} = t\vec{r}$$

$$[x,y,z] = \vec{OP_0} + t\vec{r}$$

Eks. $\vec{r} = [1,-2,5]$ og $P_0(1,0,-3)$

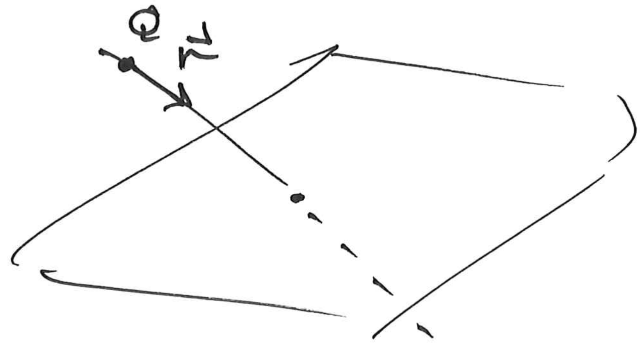
$$[x,y,z] = [1,0,-3] + t[1,-2,5]$$

$$= [1+t, -2t, -3+5t]$$

alternativ skrivemåte

$$x = 1+t$$
$$y = -2t \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$z = -3+5t$$

③ Et plan og en linje krysser typisk i ett punkt



Finn snittpunktet mellom planet $3x+z-y=2$
og linjen gjennom $Q(-1,2,-3)$ med retningsvektor $[1,-2,5]$

parametrisere linjen
(x,y,z) er på linjen $\Leftrightarrow$

$$[x,y,z] = \vec{OQ} + t\cdot\vec{r}$$
$$[-1,2,-3] + t[1,-2,5]$$

(x,y,z) ligger i planet presis når $3x+z-y=2$.

Punkt på linjen som også ligger i planet må derfor oppfylle likningen

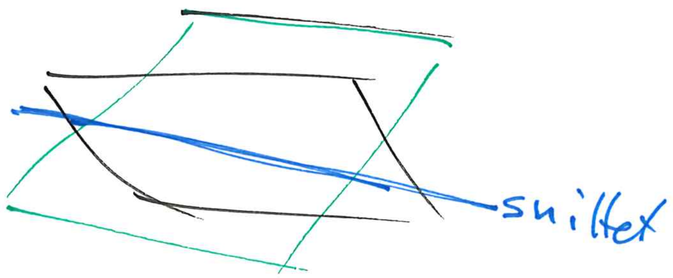
$$3(-1+t) + (-3+5t) - (2-2t) = 2$$
$$-3+3t \quad -3+5t \quad -2+2t = 2$$
$$10t = 2-(-8) = 10$$
$$\underline{t=1}$$

Koordinaten til snittpunktet er derfor gitt ved $[x,y,z] = [-1,2,-3] + 1\cdot[1,-2,5]$
$$= [0,0,2]$$

$\underline{\underline{P(0,0,2)}}$

(4) Snittet av to plan er typisk en linje
Finn linjen som er snittet (felles punkt)
til plana gitt ved

$$x + y = 3$$
$$x - 2y + 3z = 0$$



Linjen må være vinkelrett på normal-vektorene til begge plana (siden linjen ligger i begge plana)

Derfor er kryss-produktet til normalvektorene en retningsvektor til linjen.

$\vec{n}_1 = [1, 1, 0]$ $\vec{n}_2 = [1, -2, 3]$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = [3, -3, -3]$$

Velger retningsvektoren $\vec{r} = [1, -1, -1]$

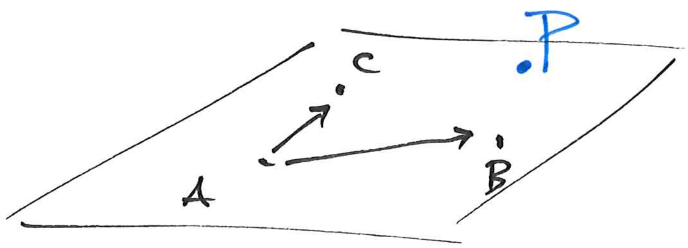
Et punkt på linjen er $P_0(2, 1, 0)$ (begge likningene for plana er oppfylt)

En parametrisering for linjen er

$$[x, y, z] = [2, 1, 0] + t[1, -1, -1]$$

5

Parametrisering av plan



Tre punkt A, B, C (som ikkje ligger på en linje) bestemmer et plan gjennom punkta

Vektorer $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ er ikkje parallelle

$P(x,y,z)$ ligger i planet $\Leftrightarrow$

finnes s og t slik at

$$\vec{OP} = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}$$

Parametriser planet gjennom $A(1,-2,3)$

som er generert av (utspenner planet) $\vec{a} = [-2, 3, 0]$, $\vec{b} = [5, 4 - 3]$

$$[x,y,z] = \vec{OA} + s\vec{a} + t\vec{b}$$

$$= [1,-2,3] + s[-2,3,0] + t[5,4,-3]$$

alternativt:

$$x = 1 - 2s + 5t$$

$$y = -2 + 3s + 4t$$

$$z = 3 \quad\quad - 3t$$

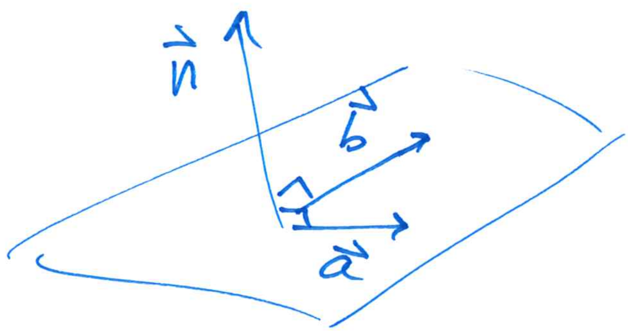
⑥ Finn en parametrisering til planet

$$x + 2y + 3z = 5$$

En normalvektor til planet er $\vec{n} = [1, 2, 3]$

Et punkt i planet er $(0,1,1)$ (likningen er oppfylt)

To ikke-parallelle vektorer vinkelrett på normalvektoren $\vec{n}$ til planet vil utspenne planet



To slike vektorer er

$\vec{a} = [2, -1, 0]$

(prøver oss frem..)

$\vec{b} = [1, 1, -1]$

Parametriseringen er

$$[x, y, z] = [0, 1, 1] + s[2, -1, 0] + t[1, 1, -1]$$

$$s, t \in \mathbb{R}$$

Andre valg av punktet og vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som utspenner planet gir en annen parametrisering av det samme planet.

Oppgave. Gitt parametriseringen

7

$$\begin{aligned} x &= 2 + s - t \\ y &= 3 - 2s + 5t \\ z &= 7 + 2s + 2t \end{aligned}$$

Finn en likning for planet.

$$[x, y, z] = \underbrace{[2, 3, 7]}_{\vec{OP_0}} + s\underbrace{[1, -2, 2]}_{\vec{a}} + t\underbrace{[-1, 5, 2]}_{\vec{b}}$$

Parametriseringen på vektorform

En normalvektor $\vec{n}$ til planet har egenskap

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{og} \quad \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$$

En slik vektor er $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = [-14, -4, 3]$$

La normalvektoren være $\vec{n} = -\vec{a} \times \vec{b} = [14, 4, -3]$.

Et punkt i planet er $P_0(2, 3, 7)$ (når $s = t = 0$)

$$[x, y, z] \cdot \vec{n} = \vec{OP_0} \cdot \vec{n}$$

hvis og bare hvis (x, y, z) er i planet

$$\begin{aligned} 14x + 4y - 3z &= [2, 3, 7] \cdot [14, 4, -3] \\ &= 28 + 12 - 21 \\ 14x + 4y - 3z &= 19 \end{aligned}$$