12.11.2018 Fausk

Geometriske rekker

1

prosent : hundredeler

$$1\% = \frac{1}{100}$$

$$13\% = \frac{13}{100} = 0,13$$

$$100\% = \frac{100}{100} = 1 \qquad 300\% = \frac{300}{100} = 3$$

Pris P øker med 20% : $P + 20\% \cdot P$
$= 1,2 \cdot P$

— reduseres med 20% : $P - 20\% P$
$= (1 - 0,2) P$
$= 0.8 P$

En vare koster 100kr

Først settes pris opp 20%. Prisen er da 120kr

Prisen reduseres så med 20%

Prisen blir da $120kr - (0,2) \cdot 120kr$
$= \underline{\underline{96kr}}$

Generelt med rentesats r

$$(1-r)(1+r)P = \underline{(1-r^2)P}$$

(2) Anta renten er 0.5%

Øker den med 0.25% så er den

nye renten : $0.5\% \, (1 + 0.0025)$

$= 0.5\% + 0.00125\%$

$= 0.50125\%$

Øker renten med 0.25 prosentpoeng

så blir renten $0.5\% + 0.25\%$

$= 0.75\%$

1 basispunkt er $\frac{1}{100}$ prosentpoeng.

Ovenfor økte renten med 25 basispunkt.

(3)

Renter

Renter per år (p.a) r

P_0 $\quad P_1 = P_0 + r \cdot P_0 = (1+r)P_0$

$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)\,P_1 = (1+r)^2\,P_0$$

n år $\quad P_n = (1+r)^n\,P_0$

Anta inflasjonen er 10% og at dere får utbetalt 1000kr per år i all fremtid.

Hva er <u>nåverdien</u> av utbetalingene

Nåverdien at utbetalingen om n år

er $\dfrac{1000}{(1,1)^n}$

Nåverdien av alle utbalingene :

$$1000\left(1 + \frac{1}{(1,1)} + \frac{1}{(1,1)^2} + \dots\right)$$

Uendelig geometrisk rekke

$$= 1000\,\frac{1}{1-(1/1.1)} = 1000\,\frac{1,1}{1,1-1}$$

$$= 1000\,\frac{1,1}{1/10} = 1000 \cdot 11 = 11\ 000$$

Nåverdien er <u>11 000 kr</u>

r rentesats

4 $P_0 = 1000$ kr n år $P_n = (1+r)^n P_0$

$r = 10\%$ hvor mange år tar det før pengemengden blir 2000kr ?

$$P_n = (1+r)^n P_0 \geq 2000\text{kr} = 2P_0$$

$$(1+0.1)^n = \underline{(1,1)^n \geq 2}$$

prøver oss frem $(1,1)^7 = 1.948$

$(1,1)^8 = 2,14$

Etter 8 år er pengemengden over 200kr.

---

10 - Logaritmer $10^{\text{Log } a} = a$

$\text{Log } 1000 = \text{Log } 10^3 = 3$

$\text{Log } 1 = 0$ fordi $10^0 = 1$

$\text{Log}\left(\frac{1}{10}\right) = -1$ — $10^{-1} = \frac{1}{10}$

$\text{Log}(50) = 1,79\ldots$

$(1,1) = 10^{\text{Log}(1,1)}$ $2 = 10^{\text{Log } 2}$

$(1,1)^n = 2$: $\left(10^{\text{Log}(1,1)}\right)^n = 10^{n \cdot \text{Log}(1,1)} = 10^{\text{Log } 2}$

så $n \text{ Log}(1,1) = \text{Log } 2$: $n = \frac{\text{Log } 2}{\text{Log}(1,1)} = \underline{\underline{7,27}}$

Anta innskuds renten er 2%.

Hvor mange år tar det før et innskud dobles?

(5)

P_0 startbeløp

$P_n = (1+r)^n P_0 = 2P_0$ (det dobbelte)

$$(1+r)^n = 2$$

$$(1{,}02)^n = 2.$$

$$1{,}02 = 10^{\text{Log } 1{,}02}$$

$$\left(10^{\text{Log}(1{,}02)}\right)^n = 10^{\text{Log}(1{,}02)\cdot n} = 10^{\text{Log } 2}$$

$$n = \frac{\text{Log } 2}{\text{Log}(1{,}02)} = \underline{35 \text{ år}}$$

(35.0027)

(6) Et beløp M settes inn på konto 1. januar fra 1980 til 1988.

Hva er pengemengden i slutten av 2000?

Rentesatsen er r

Bidraget for beløpet satt inn 1980 er $(1+r)^{21} \cdot M$

1981 er $(1+r)^{20} \cdot M$

$\vdots$

1988 er $(1+r)^{13} \cdot M$

Pengemengden ved utgangen av 2000 er summen av disse bidragene

$$M\left[(1+r)^{13} + \cdots + (1+r)^{21}\right]$$

$$= M(1+r)^{13}\Big[\underbrace{1 + (1+r) + (1+r)^2 + \cdots (1+r)^8}_{\frac{(1+r)^9 - 1}{1+r-1}}\Big]$$

$$= \underline{M(1+r)^{13} \, \frac{(1+r)^9 - 1}{r}}$$

(7)

Lån på M kroner.

M_n = Lånet etter n år. $M_0 = M$.

1) Årlig å betale alle renter + fast avdrag A.

$$M_1 = M(1+r) - \underbrace{r \cdot M}_{\text{renta}} - A = M - A$$

$$M_2 = M - 2A$$

$$\vdots$$

$$\underline{M_n = M - n \cdot A}$$

$M = 1$ mill. $A = 50\,000$ kr

Lånet er nedbetalt etter 20 år.

2) Anta vi betaler en fast sum A hvert år.

$$M_1 = (1+r)M - A$$

$$M_2 = (1+r)M_1 - A = (1+r)^2 M - A(1+r) - A$$

$$M_3 = (1+r)^3 M - A(1+r)^2 - A(1+r) - A$$

$$\vdots$$

$$M_n = (1+r)^n M - A\left(1 + (1+r) + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^{n-1}\right)$$

$$= (1+r)^n M - A\,\frac{(1+r)^n - 1}{1+r-1} = (1+r)^n M - \frac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$$

Lånet er tilbakebetalt når

$M_n = 0$

(8) $$(1+r)^n M = \frac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right]$$

Ønsker å bestemme n:

$$(1+r)^n\left[\frac{A}{r} - M\right] = \frac{A}{r}$$

$$(1+r)^n = \frac{A/r}{A/r - M} = \frac{A}{A - rM}$$

$(A \neq rM)$

$r = 3\%$ $\qquad A = 50.000 = \frac{1}{20} M$

$$\frac{A}{A - r \cdot M} = \frac{A/M}{A/M - r} = \frac{1/20}{1/20 - r}$$

$$= \frac{0.05}{0.05 - 0.03} = \frac{0.05}{0.02} = 2.5$$

$$(1{,}03)^n = 2.5$$

$$n = \frac{\text{Log } 2.5}{\text{Log } (1.03)} = \underline{31 \text{ år}}$$

(9)

Finn alle tall på forma

$$2^i \cdot 5^j \qquad 0 \le i, j \le 7$$

$1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 25, 32, \ldots$

$$\left(2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^7\right) 5^0$$

$$\left(\text{———} \;〃\; \text{———}\right) \cdot 5^1$$

$$\left(\text{———} \;〃\; \text{———}\right) \cdot 5^2$$

$$\vdots$$

$$\left(\text{———} \;〃\; \text{———}\right) \cdot 5^7$$

$$= \underbrace{\left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^7\right)}_{\frac{2^8-1}{2-1}} \underbrace{\left(5^0 + 5^1 + 5^2 + \cdots + 5^7\right)}_{\frac{5^8-1}{5-1}}$$

$$= \underline{\left(2^8-1\right) \frac{1}{4} \left(5^8-1\right)}$$

(10) Finn summen av alle tall på forme $5^i \cdot 7^j$ $\quad 0 \leq j \leq 10$, $2 \leq i \leq 14$

$$\underbrace{\left(\sum_{i=2}^{14} 5^i\right)}_{5^2 \sum_{k=0}^{12} 5^k} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{10} 7^j\right)}_{\frac{7^{11}-1}{7-1}}$$

$$\underbrace{5^2 \sum_{k=0}^{12} 5^k} \cdot \frac{7^{11}-1}{7-1}$$

$$= 5^2 \, \frac{5^{12+1}-1}{5-1} \cdot \frac{7^{11}-1}{6}$$

$$= \frac{5^2}{4 \cdot 6}\left(5^{13}-1\right)\left(7^{11}-1\right)$$

Notasjon:

til og med 14

$$\sum_{i=2}^{14} f(i) = f(2)+f(3)+\cdots+f(14)$$

starter med 2

11

For hvilke x-verdier konvergerer rekken.

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^5}{27} + \cdots$$

Kvotienten er $\frac{x^4/9}{x^3/3} = \frac{x}{3}$.

konvergerer når $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$, det er det

samme som: $\underline{\underline{|x| < 3}}$